БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА СЕКЦИЯТА ПО АСТРОНОМИЯ
BULLETIN OF THE SECTION OF ASTRONOMY
Том (Vol.) II

ВЪРХУ РЕШЕНИЕТО НА ОСНОВНОТО УРАВНЕНИЕ ПРИ ПАРАБОЛИЧНОТО ДВИЖЕНИЕ, КОГАТО ИСТИНСКАТА АНОМАЛИЯ Е БЛИЗКА ДО 180°

Ангел Бонов

Положението на едно небесно тяло (комета) върху неговата параболична орбита, във фокуса на която се намира Слънцето, в даден момент t е напълно определено с двете полярни координати: истинската аномалия v и радиус-вектора r.

Ако τ е моментът, в който небесното тяло се намира в перихелия на своята параболична орбита, и q — перихелното разстояние, истинската аномалия във всеки момент t се определя от

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2}+\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}^3\,\frac{v}{2}=\frac{k(t-\tau)}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}\,, \tag{1}$$

където k е константата на Gauss (масата на небесното тяло спрямо масата на Слънцето се пренебрегва).

В същия момент t радиус-векторът на небесното тяло се определя от

$$r=\frac{q}{\cos^2\frac{v}{2}}=q\left(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{v}{2}\right). \tag{2}$$

Уравнението (1) е основно при параболичното движение. По познатите методи това уравнение може да се реши непосредствено без помощта на специални таблици [1]. На практика обаче решението му се извършва посредством таблиците на Barker, Leverrier, Субботин и др. Но всичките таблици дават възможност да се определи истинската аномалия от (1) само когато тя не надминава 160°.

Някои комети се движат по параболични орбити с много малко перихелно разстояние q. От друга страна, със съвременните средства такива комети са достъпни за наблюдение на значителни разстояния от Слънцето. В такива случаи при малко q и значително r, както се вижда от (2), стойността на истинската аномалия е близка до 180° и определянето ѝ от (1) с помощта на таблиците е невъзможно. Такива комети досега са наблюдавани неведнъж [2].

За решаването на (1), когато стойността на истинската аномалия е близка до 180°, се прилага методата на Nicolai [3], която накратко се състои в следното.

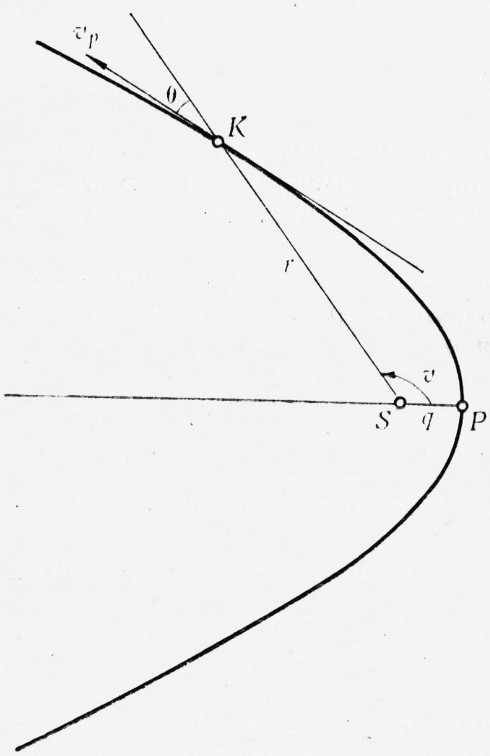
Полага се

$$M=\frac{t-\tau}{q^{3/2}}, \quad y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{6k}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{M}}=\frac{3{,}0148852}{\sqrt[3]{M}} \tag{3}$$

и като се използват развития в редове, които се ограничават до шестата степен на y, в резултат се получава

$$\operatorname{cotg}\frac{v}{2}=\frac{y}{1-y^2}\,. \tag{4}$$

В тази работа ние излагаме една нова метода и въз основа на нея получаваме формула, която дава възможност да се определи истинската аномалия, когато стойността ѝ е близка до 180°.



Фиг. 1

Нека в момента t кометата, на която перихелното разстояние е много малко, се намира в точка K на нейната параболична орбита на твърде голямо разстояние от Слънцето (фиг. 1). Означаваме с θ ъгъла, който радиус-векторът на кометата сключва с тангентата в точка K на нейната орбита. Този ъгъл θ се определя посредством известната от диференциалната геометрия формула

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{r}{r'}=\frac{r}{\dfrac{dr}{dv}}\,. \tag{5}$$

Като диференцираме (2), непосредствено получаваме

$$\frac{dr}{dv}=\frac{q\sin\dfrac{v}{2}}{\cos^3\dfrac{v}{2}}\,.$$

Тази стойност на dr/dv, както и стойността на r от (2) заместваме в (5) и получаваме

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\dfrac{q}{\cos^2\dfrac{v}{2}}}{\dfrac{q\sin\dfrac{v}{2}}{\cos^3\dfrac{v}{2}}}=\frac{\cos\dfrac{v}{2}}{\sin\dfrac{v}{2}}=\operatorname{cotg}\frac{v}{2}=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{v}{2}\right),$$

откъдето

$$\theta = 90° - \frac{v}{2}. \tag{6}$$

От тази формула непосредствено следва, че

$$\lim_{v \to 180°} \theta = 0,$$

т. е. колкото стойността на истинската аномалия е по-близка до 180°, толкова ъгълът θ е по-малък и радиус-векторът почти съвпада с тангентата. В граничния случай ($v = 180°$) радиус-векторът напълно съвпада с тангентата.

Въз основа на този резултат, като вземаме пред вид, че скоростта на кометата в точка K от нейната орбита с радиус-вектор r е

$$v_p^2 = \frac{2k^2}{r}, \quad \text{или} \quad v_p = \frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{r}}, \tag{7}$$

ние полагаме

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{r}}. \tag{8}$$

Това полагане е в сила само за стойности на истинската аномалия, близки до 180°.

Производната dr/dt намираме, като диференцираме (2), считайки времето t за независима променлива. Непосредствено получаваме

$$\frac{dr}{dt} = \frac{q \sin \frac{v}{2}}{\cos^3 \frac{v}{2}} \frac{dv}{dt}. \tag{9}$$

Този израз на dr/dt заместваме в (8) и получаваме диференциалното уравнение

$$\frac{q \sin \frac{v}{2}}{\cos^3 \frac{v}{2}} \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{r}}.$$

В него заместваме $\sqrt{r}$ със стойността му от (2) и след като отделим променливите, получаваме

$$\frac{\sin \frac{v}{2}}{\cos^4 \frac{v}{2}} dv = \frac{\sqrt{2}\,k}{q^{3/2}} dt.$$

Като умножим двете страни на последното диференциално уравнение с 1/2, след някои елементарни преобразувания получаваме

$$-\frac{d \cos \frac{v}{2}}{\cos^4 \frac{v}{2}} = \frac{k}{\sqrt{2}\, q^{3/2}} dt,$$

откъдето

$$-\int_0^v \frac{d\cos\frac{v}{2}}{\cos^4\frac{v}{2}} = \frac{k}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}\int_\tau^t dt.$$

След като интегрираме в означените граници, получаваме формулата

$$\frac{1}{\cos^3\frac{v}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{k(t-\tau)}{\sqrt{2}\,q^{3/2}},$$

или

$$\sec^3\frac{v}{2} = \frac{1}{\cos^3\frac{v}{2}} = \frac{3k(t-\tau)}{\sqrt{2}\,q^{3/2}} + 1. \tag{10}$$

Получената формула (10) дава възможност да се определи истинската аномалия v, когато стойността ѝ е близка до 180°. При приложенията на тази формула трябва да се има пред вид, че колкото стойността на истинската аномалия е по-близка до 180°, толкова по-близко до действителността е полагането (8), въз основа на което се получава тази формула.

Ще приложим формула (10) за следния пример. Перихелното разстояние на кометата 1945 VII е $q=0{,}006$ а. е. Да се намери истинската аномалия на тази комета 1000 дни след преминаването ѝ през перихелия ($t-\tau=1000$). За сравнение определяме истинската аномалия и по методата на Nicolai.

I. По методата на Nicolai

$t-\tau$	3,00000
$q^{3/2}$	$6{,}66723_{-10}$
M	6,33277
$\sqrt[3]{M}$	2,11092

От (3) намираме

3,0148852	0,47927
y	$8{,}36828_{-10}$
$y^2=$	0,0005452
$1-y^2=$	0,9994548

От (4) получаваме

$\mathrm{cotg}\,\frac{v}{2}$	$8{,}36852_{-10}$

$v=177°19'24''$.

II. По формула (10)

$3k(t-\tau)$	1,71270
$\sqrt{2}q^{3/2}$	$6{,}81775_{-10}$
$\frac{3k(t-\tau)}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}=$	78515
$\cos^3\frac{v}{2}$	$5{,}10504_{-10}$
$\cos\frac{v}{2}$	$8{,}36835_{-10}$

$v=177°19'24''$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонев Н., Теоретична астрономия, II изд., 1961, 127.
2. Bertaud Ch., l'Astronomie, **80**, 1966, 137.
3. Орлов А. Я. и Б. А. Орлов, Курс теоретической астрономии, 1940, 24.

Постъпила на 15. X. 1966 г.

О РЕШЕНИИ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ, КОГДА ИСТИННАЯ АНОМАЛИЯ БЛИЗКА К 180°

А. Бонов

(Резюме)

На практике для определения истинной аномалии (v) посредством основного уравнения (1) при параболическом движении самое удобное применять специальные таблицы Баркера, Леверрие и им подобные.

В тех случаях, когда истинная аномалия близка к 180°, становится невозможным использование вышеупомянутых таблиц. В случаях весьма значительной действительной аномалии следует отдать предпочтение методу Николаи (формулы (3) и (4)).

В настоящей работе автором выводится приблизительная формула

$$\sec^3 \frac{v}{2} = \frac{1}{\cos^3 \frac{v}{2}} = \frac{3k(t-\tau)}{\sqrt{2}\, q^{3/2}} + 1,$$

посредством которой можно определить истинную аномалию в тех случаях, когда ее значения близки к 180°.

Выведенная формула применяется на одном примере.

SUR LA SOLUTION DE L'ÉQUATION FONDAMENTALE DU MOUVEMENT PARABOLIQUE QUAND L'ANOMALIE VRAIE EST VOISINE DE 180°

A. Bonov

(Résumé)

En pratique, pour déterminer l'anomalie vraie v de l'équation fondamentale (1) du mouvement parabolique, il est plus commode d'utiliser les tables spéciales de Barker, de Leverrier et ses analogues.

Dans les cas où l'anomalie vraie est voisine de 180°, il est impossible d'utiliser ces tables.

Il est préférable de se servir dans les cas d'une très grande anomalie vraie de la méthode donnée par Nicolai (les formules (3) et (4)).

Dans le présent article nous obtenons la formule approximative

$$\sec^3 \frac{v}{2} = \frac{1}{\cos^3 \frac{v}{2}} = \frac{3k(t-\tau)}{\sqrt{2}\, q^{3/2}} + 1.$$

Par cette formule on peut déterminer l'anomalie vraie dans les cas où elle a des valeurs voisines de 180°.

La formule obtenue est appliquée à un exemple.