БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА СЕКЦИЯТА ПО АСТРОНОМИЯ
BULLETIN OF THE SECTION OF ASTRONOMY
Том (Vol.) V, 1972

ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ПОДСПЪТНИКОВИ ТОЧКИ ЗА ЕФЕМЕРИДНИ НУЖДИ

Владимир Шкодров, Любомир Кузманов и Виолета Иванова

Спътниковите ефемериди се съставят в зависимост от нуждите на наблюдателните станции. Техният вид се диктува преди всичко от метода на наблюдение и наличната наблюдателна апаратура. В повечето случаи при изчисления на приблизителното място се вземат пред вид координатите на наблюдателната станция. Такива ефемериди се отнасят за станцията, чиито координати са включени в изчисленията и не могат да се ползват от други станции с изключение на близките до нея (със съответните диференциални поправки в координатите на спътника и моментите за сметка на диференциалните промени в координатите на наблюдателните станции).

Ние смятаме, че най-универсални и най-удобни ефемериди за група наблюдателни станции са ефемеридите, които дават подспътниковите точки на наблюдавания спътник за голямо число положения на същия върху орбитата му. Такива ефемериди са инвариантни относно положенията на наблюдателните станции и практически позволяват с прости допълнителни изчисления всеки наблюдател да разполага с необходимите му положения на спътника.

Целта на настоящата работа е да бъдат получени достатъчно точни формули за изчисляване на подспътникови точки на даден спътник въз основа на прецизни модифицирани орбитални елементи за началната епоха на оскулация.

При изчисленията са използвани две координатни системи $OXYZ$ и $OX'Y'Z'$. Тези системи са избрани така, че началата им да съвпадат с центъра на масата на Земята, осите Z и Z' на двете системи съвпадат с ротационната ос на Земята, осите X, X' и Y, Y' съвпадат в началния момент на оскулация, оста X лежи в плоскостта на Гринвичкия меридиан. Системата $OXYZ$ е неподвижна и не участвува в земната ротация, а системата $OX'Y'Z'$ е неподвижно скрепена със Земята и ротира заедно с нея. Нейната ротация се дефинира със завъртването на Земята за една звездна минута.

I. ОПРЕДЕЛЯНЕ МОМЕНТА T_n, В КОЙТО СПЪТНИКЪТ ПРЕСИЧА ЕКВАТОРА, И РАДИУС-ВЕКТОРА НА СПЪТНИКА В ТОЗИ МОМЕНТ r_n

При определянето на моментите T_n за независима променлива се използва истинската аномалия ϑ

$$T_n = \int_0^{\vartheta_n} \frac{dt}{d\vartheta}\, d\vartheta + t_0, \tag{1}$$

където t_0 е интеграционна константа, означаваща епохата на началната оскулация. За изразяването на $dt/d\vartheta$ в явен вид използваме точното съотношение [1]

$$r^2\left(\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\vartheta}{dt} + \cos i\,\frac{d\Omega}{dt}\right) = k\sqrt{p}, \tag{2}$$

което с точност до α^2/e^2 можем да запишем във вида [2]

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{r^2}{k\sqrt{p}} + \frac{r^4}{k^2 p}\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i\,\frac{d\Omega}{dt}\right), \tag{3}$$

където r е радиус-векторът на спътника, ω — аргумент на перигея, Ω — дължина на възходящия възел, $k = (fM)^{1/2}$ (M е масата на Земята, а f — гравитационната константа), $p = a\,(1-e^2)$ (a е голямата полуос на орбитата, а e — нейният ексцентрицитет), i — наклон на орбитата, а α — сплеснатост на Земята. Ще отбележим, че понеже грешката от пренебрегнатите членове в (3) е пропорционална на величината α^2/e^2, тя може да нарасне значително при малки стойности на ексцентрицитета.

От (1) и (3) получаваме

$$T_n = t_0 + \frac{1}{k}\int_0^{\vartheta_n} \frac{r^2 d\vartheta}{\sqrt{p}} + \frac{1}{k^2}\int_0^{\vartheta_n} \frac{r^4(\dot\omega + \cos i\,\dot\Omega)}{p}\, d\vartheta, \tag{4}$$

където

$$\dot\omega = \frac{d\omega}{dt}; \quad \dot\Omega = \frac{d\Omega}{dt}.$$

В (4) поставяме

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1+e\cos\vartheta},\\ (1+e\cos\vartheta)^{-2} &= 1 - 2e\cos\vartheta + 3e^2\cos^2\vartheta,\\ (1+e\cos\vartheta)^{-4} &= 1 - 4e\cos\vartheta + 10e^2\cos^2\vartheta. \end{aligned} \tag{5}$$

Освен това приемаме, че в интервала от 0 до ϑ_n

$$p = \text{const}, \quad i = \text{const}. \tag{6}$$

Изразът $\dot\omega + \cos i\dot\Omega$ преобразуваме въз основа на следните съображения. От формула (2) получаваме точното съотношение

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{r^2}{k\sqrt{p}} + \frac{r^2}{k\sqrt{p}}\,\frac{dt}{d\vartheta}\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i\,\frac{d\Omega}{dt}\right), \tag{7}$$

Имайки пред вид, че изразът в скобите е от ред α^2/e^2, с точност от реда на земната сплеснатост можем да напишем

$$(8) \qquad e\frac{dt}{d\vartheta}=e\frac{r^2}{k\sqrt{p}}+O(\alpha^2).$$

Последната връзка между t и ϑ ни дава възможност да определим вековите пертурбации от първи ред относно сплеснатостта на Земята в Ω и ω от уравненията на Лагранж по метода, изложен в [3]. Така че можем да напишем

$$(9) \qquad \omega'+\cos i\Omega^1=\text{const},$$

където с ω' и Ω' са означени вековите пертурбации от първи ред в ω и Ω.

Имайки пред вид (5), (6) и (9), интегрирането на (4) дава

$$(10) \qquad T_n=t_0+\frac{P}{2\pi}\left(\vartheta_n-2e\sin\vartheta_n+\frac{3}{4}e^2\sin 2\vartheta_n\right)$$
$$+\frac{P^2}{4\pi^2}\left[\vartheta_n-4e\sin\vartheta_n+e^2\left(2\vartheta_n+\frac{5}{2}\sin 2\vartheta_n\right)\right](\omega'+\cos i\Omega'),$$

където е поставено

$$(11) \qquad \begin{aligned} p^{3/2}k^{-1}&=\frac{P}{2\pi}\left(1-\frac{3}{2}e^2\right),\\ p^3k^{-2}&=\frac{P^2}{4\pi^2}(1-3e^2). \end{aligned}$$

В (10) и (11) $P=2\pi/n$ е периодът на спътника за момента t_0 на началната оскулация. С помощта на (10) може да бъде изчислен моментът T_n на пресичането от спътника на екваториалната плоскост в интервала от 0 до ϑ_n.

Радиус-векторът r_n на спътника в момента, в който той пресича екваториалната равнина, се определя от (5), където вместо ϑ трябва да се постави ϑ_n (истинска аномалия за момента на пресичането). От изчислителна гледна точка обаче при пресмятането на r_n е удобно да се отделни променливата част от постоянната. За тази цел вместо (5) можем да напишем

$$(12) \qquad r_n=a(1-e^2)(1-e\cos\vartheta_n+e^2\cos^2\vartheta_n),$$

където

$$(13) \qquad \vartheta=u-\omega-\Delta\omega.$$

В (13) $\Delta\omega$ се определя от изчислението на аргумента на перигея като функция от времето, т. е.

$$(14) \qquad \Delta\omega_n=\int_0^{t_n}\frac{d\omega}{dt}dt;$$

от друга страна,

$$(15) \qquad \cos(\vartheta_0+\Delta\omega)=\cos\vartheta_0-\Delta\omega\sin\vartheta_0.$$

От (12), (13) и (15) получаваме

(16) $$r_n=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta_0}+ae(\sin\vartheta_0-e\sin\vartheta_0)\,\Delta\omega_n.$$

За екваториалната равнина, за която $\vartheta_0=\vartheta_n=\omega_0$,

(17) $$r_n=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega_0}+ae(\sin\omega_0-e\sin 2\omega_0)\,\Delta\omega_n.$$

За определянето на $\Delta\omega$ в съответствие с поставената задача при интегрирането на (14) включваме само вековите пертурбации от първи ред относно сплеснатостта на Земята, така че вместо (14) имаме

(18) $$\Delta\omega_n=\omega'(T_n-t_0).$$

Поставяйки (18) в (17), получаваме окончателно

(19) $$r_n=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega_0}+ae(\sin\omega_0-e\sin 2\omega_0)\omega'(T_n-t_0).$$

Височината на спътника над земната повърхност се определя от

(20) $$H_n=r_n-\varrho_n,$$

където ϱ_n е геоцентричният радиус-вектор на земната повърхност в подспътниковата точка. В нашия случай достатъчно е Земята да се приеме за сфера с радиус, равен на средния радиус на Земята.

2. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА МОМЕНТА T_m, В КОЙТО СПЪТНИКЪТ СЕ НАМИРА В ПРОИЗВОЛНО ПОЛОЖЕНИЕ ОТНОСНО ЕКВАТОРА ВЪРХУ ОРБИТАТА, И РАДИУС-ВЕКТОРА НА СПЪТНИКА В ТОЗИ МОМЕНТ r_m

Предполагаме, че спътникът, след като е пресекъл екватора в момента T_n, е продължил своето движение и се намира в положение m, т. е считаме, че истинската аномалия ϑ в точка m е

(21) $$\vartheta_m=\vartheta_n+u_m.$$

Времето, за което спътникът се е придвижил от екватора до точка с индекс m от орбитата, ще означим с ΔT_m. Времето, отчитано от началната оскулация, следователно ще бъде $T_m=T_n+\Delta T_m$. Тъй като вече определихме T_n, намирането на T_m се свежда до намирането на ΔT_m. За целта с помощта (10) изчисляваме T_m, като вместо ϑ_n поставяме ϑ_m, и от получения момент T_m изваждаме момента за пресичането на екватора T_n. Така получаваме

(22) $$\Delta T_m=\frac{P}{2\pi}\left[\vartheta_m-\vartheta_n-2e(\sin\vartheta_m-\sin\vartheta_n)+\frac{3}{4}e^2(\sin 2\vartheta_m-\sin 2\vartheta_n)\right]$$
$$+\frac{P^2}{4\pi^2}\left\{\vartheta_m-\vartheta_n-4e(\sin\vartheta_m-\sin\vartheta_n)+e^2\left[2(\vartheta_m-\vartheta_n)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{5}{2}(\sin 2\vartheta_m-\sin 2\vartheta_n)\right]\right\}(\omega'+\cos i\Omega').$$

Полагаме

(23) $$\vartheta_n=360^\circ n-\omega_0,$$
$$\vartheta_m=360^\circ n+u_m-\omega_0$$

и тогава

$$u_m = \vartheta_m - \vartheta_n. \tag{24}$$

С помощта на (23) и (24) от (22) получаваме

$$\Delta T_m = \frac{P}{2\pi}\left[u_m - 4e\sin\frac{u_m}{2}\cos\left(\frac{u_m}{2}-\omega_0\right)+\frac{3}{4}e^2\sin u_m\cos(u_m-2\omega_0)\right] \tag{25}$$
$$+\frac{P}{4\pi^2}\left\{u_m - 8e\sin\frac{u_m}{2}\cos\left(\frac{u_m}{2}-\omega_0\right)+e^2[2u_m+5\sin u_m\cos(u_m-2\omega_0)]\right\}(\omega'+\cos i\Omega').$$

Радиус-векторът на спътника за момента T_m е

$$r_m = r_n + \Delta r_m. \tag{26}$$

Тъй като r_n се определя по (17), остава да определим Δr_m. Тази поправка се определя от

$$\begin{aligned}\Delta r_m &= a\{e[\cos\omega_0 - \cos(u_m-\omega_0)] + e^2[\cos^2(u_m-\omega_0) - \cos^2\omega_0]\} \\ &+ a\{e[\sin(u_m-\omega_0)+\sin\omega_0] - e^2[\sin 2(u_m-\omega_0)+\sin 2\omega_0]\}\omega'\Delta T_m.\end{aligned} \tag{27}$$

3. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА КООРДИНАТИТЕ НА ПОДСПЪТНИКОВИТЕ ТОЧКИ

В неподвижната координатна система $QXYZ$ координаторите на подспътниковата точка Φ и Λ се определят по известните формули

$$\begin{aligned}\sin\Phi_m &= \sin u_m \sin i, \\ \Phi_n &= 0, \\ \Lambda_m &= \Lambda_n + \Delta\Lambda,\end{aligned} \tag{28}$$

където

$$\begin{aligned}\Lambda_m &= \arcsin\frac{\operatorname{tg}\Phi}{\operatorname{tg} i} + \Omega - S, \\ \Delta\Lambda_m &= \Omega'(T_m - t_0), \\ \Lambda_n &= \Omega - S,\end{aligned} \tag{29}$$

като S е звездното време в Гринвичкия меридиан в момента t_0.

В подвижната координатна система $OX'Y'Z'$ координатите на подспътниковата точка φ и λ ще бъдат

$$\begin{aligned}\varphi_m &= \Phi_m, \\ \lambda_m &= \Lambda_m + \delta_m(T_m - t_0), \\ \lambda_n &= \Lambda_n + \delta_n(T_n - t_0).\end{aligned} \tag{30}$$

Величината δ_m (δ_n) отчита завъртването на подвижната координатна система спрямо неподвижната от момента на начална оскулация до момента T_m (респективно T_n).

Получените формули могат да бъдат използвани за изчисляване координатите на подспътниковите точки на спътници, движещи се по почти кръгови орбити, в интервал от 1,5—2,0 дни, като при това се осигурява точност в моментите 0,5 min и в координатите 0°,5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tisserand, F. Traité de Mécanique Céleste. I. Paris, 1889.
2. Жонголович, И. Д., Бюлл. ИТА, 7 (1960), № 7 (90).
3. Батраков, Ю. В., Бюлл. ИТА, 7 (1960), № 7 (90).

Постъпила на 15 декември 1969 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДСПУТНИКОВЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ЭФЕМЕРИДНЫХ НУЖД

Вл. Шкодров, Л. Кузманов и В. Иванова

(Резюме)

Получены формулы расчета координат подспутниковых точек искусственных спутников Земли, движущихся по почти круговым орбитам.

Формулы позволяют рассчитать координаты подспутниковых точек с тоностью до 0°,5 в интервале 1,5—2,0 дней.

DETERMINATION OF THE SUB-SATELLITE POINTS FOR EPHEMERIDAL REQUIREMENTS

V. Shkodrov, L. Kouzmanov and I. Ivanova

(Summary)

Formulae to calculate the sub-satellite points of earth satellites, moving in almost circular orbits, have been evolved.

The formulae make it possible to calculate the coordinates of the sub-satellite points with an accuracy of 0°.5 during a 1.5- to 2.0-day interval.