

Обобщенный χ^2 -метод для изучения проблемы существования сверхскоплений галактик

I. Теория

Марин Калинков

Введение

Проблема существования скоплений галактик второго порядка (или сверхскопления галактик) является основной во внегалактической астрономии, а также в космологии. В конвенциональной постановке проблема состоит в установлении максимальных конфигураций в пространственном распределении галактик. Притом, в иерархической структуре сверхскопления расположены выше, чем обычные (первого порядка) скопления галактик. Так как определить понятие *скопления галактик* весьма затруднительно, то нельзя и думать о серьезном рассмотрении какого-либо определения *скоплений второго порядка*. Но под воздействием очень многих работ уже сложилось интуитивное представление о сверхскоплениях. Здесь использовано следующее рабочее определение: конфигурация, состоящая из скоплений галактик и имеющая такую плотность (видимую или пространственную), что вероятность образования такой конфигурации гораздо меньше, чем вероятность случайного образования, определяемая из самых общих статистических соображений, является скоплением второго порядка. Как видно, определение это не намного лучше интуитивного.

Исследования обычно проводятся на основе двух каталогов скоплений галактик — Abell [1] и Zwicky и др. [2]. Естество наблюдательного материала показывает, что можно применять эффективно только статистические методы. Притом, даже в случае, если скопления второго порядка наверняка существуют, нельзя ожидать значительные эффекты, указывающие на их существование. Так как наблюдательный материал, находящийся в упомянутых каталогах, можно рассматривать как „засоренную“ выборку неудивительно, что для решения проблемы сверхскоплений применялись весьма разнообразные методы.

Как известно, к настоящему времени предложены и разрабатываются главным образом два направления — согласно Abell [1], [3—5], Abell, Seligman [6, 7], Караченцеву [8], Kiang [9], Kiang, Saslaw [10], Гусаку [11], Vaucouleurs [12], Калинкову [13—16], Bogart, Wagoner [17], Peebles [18, 19], Peebles, Hauser [20], а также [21], скопления галактик второго порядка существуют, в то время как Zwicky [22—24], Zwicky, Rudnicki [25—26], Zwicky, Berger [27], Zwicky, Karłowicz [28, 29], Karłowicz [30—36], а также Yu, Peebles [37], Fullerton, Hoover [38], считают, что скоплений второго порядка не существует. Другое направление, иллюстрированное в превосходном обзоре Vaucouleurs [12], основано на результатах [10] и состоит в том, что группирование галактик проявляется по всем шкалам без каких бы то ни было преобладающих размеров.

Некоторые из цитированных работ не содержат вполне определенные результаты — например, [37], критикованная в [12]. Отметим, что в следующих своих работах Пиблс получает замечательные результаты, противоречащие этой работе, а также [38].

Согласно Эйбелу и некоторым другим авторам, характеристические размеры скоплений галактик второго порядка примерно $(40—50)h^{-1}$ Мпс (где h обозначена константа Хаббла в единицах $100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$). Примечательно то, что согласно Цвикки существуют т. н. „ячейки скоплений“ („cluster cells“) с подобными размерами (наверное, это самое старое представление о глобальной и регулярной структуре распределения галактик в пространстве, поскольку оно предложено еще в [39]. Так как Цвикки не признает никаких идей относительно сверхскоплений галактик, то можно предположить, что долгий спор о том, существуют ли скопления галактик второго порядка, в сущности, является спором терминологическим.

В общем, применялись корреляционные и спектральные методы, χ^2 -критерий, анализ отношения k (введено в работы Zwicky [40, 41]), индекс группирования (index of clumpiness) K , введенный Neuman и др. [42] по поводу k , изучалась населенность скоплений галактик, распределение расстояний до ближайших соседей и др. Все методы имеют как преимущества, так и недостатки. Общим недостатком некоторых методов является тот факт, что они неприменимы в большом диапазоне по характеристическим размерам. Здесь характеристический размер применяется в частотном смысле — это чаще всего встречаемый из всех возможных размеров конфигураций в данном поле). Самые яркие примеры этого — результаты корреляционных и спектральных методов — они в состоянии уверенно регистрировать только те из характеристических размеров, которые в несколько раз меньше размеров исследуемой области. Если применяется метод, естественно ограниченный снизу размерами элементарных квадратов, а сверху — размерами исследуемой области, то будет возможным исследовать сравнительно небольшие области вокруг Северного галактического полюса (NGP), что ведет к минимизированию влияния галактического поглощения, а уменьшение области минимизирует эффекты из-за проекции небесной сферы на плоскости.

В первой части этой работы разработан именно подобный метод, который базируется на идеях Abell [1, 3, 4] для оценки вероятности отклонения от пуассоновских распределений как функция разбиения иссле-

дуемой области; на одном предложении Kiang, Saslaw [10]; на работе Neuman и др. [42], а также на исследовании Slakter [43]. Во второй части метод применяется к скоплениям из каталога Эйбела, в третьей — к скоплениям из каталога Цвикки, а в последней части проводится сравнение с другими методами.

Обобщенный χ^2 -метод

Пусть $\{d(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in T^2\}$ — вещественное случайное поле, заданное на целочисленной решетке T^2 . Случайное поле считаем заданным, если в каждой точке $\mathbf{x}=(x_1, x_2) \in T^2$ дана случайная величина $d(\mathbf{x})$, распределенная по закону Пуассона. (Размерность $n \times n$ решетки (квадратная!) должна удовлетворять некоторым требованиям.) Пусть элементы $d(\mathbf{x})$ представляют число центров скоплений галактик, находящихся в узлах решетки. Без нарушения общности будем считать, что константа решетки равняется единице и элементарный квадратик имеет размеры 1×1 . Пусть d_{ik} представляет число центров скоплений в квадратике (i, k) . Другими словами, число скоплений d_{ik} содержится в квадратике $(x_1 - \frac{1}{2} < x_1 \leq x_1 + \frac{1}{2}; x_2 - \frac{1}{2} < x_2 \leq x_2 + \frac{1}{2})$, если $i \equiv x_1$ и $k \equiv x_2$. Среднее число центров скоплений будет

$$(1) \quad \bar{d} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ik} / n^2.$$

Рассмотрим регулярное сжатие или стягивание поля по индексу i , по индексу k и по обоим индексам. Новое поле $\{d(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in T^2\}$, и в каждой точке $\mathbf{y}=(y_1, y_2) \in T^2$ дана случайная величина $d(\mathbf{y})$, распределенная по Пуассону, но в общем случае решетка уже не является квадратной. Пусть $d_{\alpha\beta}$ представляет число центров скоплений в элементарном прямоугольнике (α, β) . Тогда общий член сжатого поля будет

$$(2) \quad d_{\alpha\beta}(u+1, v+1) = \sum_{p=0}^u \sum_{q=0}^v d_{i'k'}, \quad i' = \alpha + u(i-1) + p; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n/(u+1), \\ k' = \beta + v(k-1) + q; \quad \beta = 1, 2, \dots, n/(v+1).$$

Так, $d_{\alpha\beta}(u+1, v+1)$ состоит из центров скоплений, содержащихся в $(u+1)(v+1)$ элементарных квадратиках, число которых определяется данными u и v . Размерность сжатого поля $\frac{n}{u+1} \times \frac{n}{v+1}$ и общее число однотипных прямоугольников, плотно покрывающих всю исследуемую площадь, дается

$$(3) \quad N = \frac{n^2}{(u+1)(v+1)}.$$

Оценкой среднего числа центров для данной разбивки $(u+1, v+1)$ является

$$(4) \quad \tilde{d}(u+1, v+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ik} / N = (u+1)(v+1) \bar{d},$$

а оценкой дисперсии

$$(5) \quad s^2(u+1, v+1) = \sum_{\alpha=1}^{\frac{n}{u+1}} \sum_{\beta=1}^{\frac{n}{v+1}} [d_{\alpha\beta}(u+1, v+1) - \tilde{d}(u+1, v+1)]^2 / (N-1).$$

Очевидно, при $u=v=0$ сжатое поле совпадает с основным полем. Когда $u=v=1$, сжатое поле снова становится квадратным, но размерность уже $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$. Вообще, когда $u=v$, присоединенные элементарные квадратики формируют снова квадраты и при $u=v=\frac{n}{2}-1$ размерность поля 2×2 (четырёхклеточная таблица, fourfold table или таблица сопряженности признаков 2×2). При $u=n-1, v=0$ рассматриваемое поле вырождается в одномерное с размерностью $1 \times n$, так как суммирование ведется по колонкам (по i). Когда $u \neq v$, присоединенные элементарные квадратики формируют прямоугольники, и при $u > v$ они вытянуты по индексу k , а при $u < v$ — по индексу i .

Предложенный метод можно использовать при изучении таблиц сопряженных признаков, когда члены генеральной совокупности можно классифицировать по принадлежности к одной из r категорий относительно признака A и к одной из s категорий относительно признака B и так далее в многомерном случае. Применение оправдано при таблицах с двумя и тремя входами, а также и для таблиц более высокого порядка, когда применяются критерии независимости (Kullback [44], Rao [45], Kendall, Stuart [46] и др.).

Совершенно ясно, что выбор n является существенным, так как определяет возможности разбиения начального поля. Если n — простое число, то возможностей только две: 1) $u=0, v=n-1$ и 2) $u=n-1, v=0$. Когда n — составное число, его представление в виде произведения простых чисел следующее

$$n = a^\lambda b^\mu c^\nu \dots,$$

где λ, μ, ν, \dots — целые положительные числа. Тогда число возможных разбиений определяется квадратом чисел $\psi(n)$ всех делителей n , и $\psi(n) = (\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)\dots$.

После исключения тривиального случая $u+1=v+1=n$ число возможных разбиений будет $\psi^2(n) - 1$.

Пример I. Для $n=36=2^2 \cdot 3^2$ имеем

$$u+1, v+1 = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$$

и $\psi^2(n) - 1 = 80$ является числом всех возможных разбиений. При этом для некоторых случаев при существенно отличающихся разбиениях $(u+1)(v+1) = \text{const}$.

Например, для разбиений $1 \times 12 = 12 \times 1 = 2 \times 6 = 6 \times 2 = 3 \times 4 = 4 \times 3 \equiv 12$ все объединенные прямоугольники составлены из одного и того же числа элементарных квадратиков.

Пример II. Для $n=72=2^3 \cdot 3^2$, существует $\psi^2(n) - 1 = 143$ разных способа для разбиения начального поля.

Если центры скоплений в начальном поле (представленном как квадратная решетка) расположены случайно, то распределение величин d_{ik}

(соответственно и $d_{\alpha\beta}(u+1, v+1)$) будет пуассоновским. Согласно основной идее Abell [1, 3], самое большое отклонение между наблюдаемым и теоретическим пуассоновским распределением проявится при объединенных элементарных квадратах, формирующих прямоугольную разбивку с площадью $S=(u+1)(v+1)$, примерно соответствующей характеристическим площадям, занятым скоплениями галактик второго порядка. Видимые характеристические размеры (или диаметры) сверхскоплений будут приблизительно $S^{-1/2}$.

Эйбел установил самое большое отклонение при помощи классического χ^2 -критерия, применяемого для наблюдаемых и пуассоновских частот. Но поскольку видимая поверхностная плотность центров скоплений галактик \mathcal{D} скопл./ \square° небольшая, то для площади порядка нескольких квадратных градусов параметр пуассоновского распределения $\lambda < 1$ и степени свободы $\nu \leq 4$, и тогда классическая процедура для установления отклонений не является эффективной. При $\lambda > 1$, чтобы достигнуть большого ν , необходимо рассмотреть огромные области небесной сферы, для которых галактическое поглощение нельзя считать равномерным. Эти недостатки можно избежать частично следующим образом.

Neuman и др. [42], анализируя величину k , предложенную Zwicky [40, 41], показали, что более представительным является индекс группирования K , квадрат которого в случае пуассоновского распределения имеет вид

$$(6) \quad K^2 = \frac{s^2}{\bar{d}},$$

где дисперсия и среднее получаются из

$$(7) \quad s^2 = \sum_{\substack{\text{по все} \\ i \text{ и } k}} (d_{ik} - \bar{d})^2 / (N-1)$$

$$(8) \quad \bar{d} = \sum_{\substack{\text{по все} \\ i \text{ и } k}} d_{ik} / N.$$

Когда поле пуассоновское, индекс группирования равняется единице. Этот индекс можно использовать в качестве меры отклонения наблюдаемого поля от пуассоновского. Особые преимущества K^2 согласно Neuman и др. [42] состоят в том, что дисперсия и среднее являются оценками.

Допустим, что теоретические частоты одинаковы, и после умножения (6) на $N-1$ (см. Kiang и Saslaw [10]) получим

$$(9) \quad (N-1)K^2 = \sum_{\substack{\text{по все} \\ i \text{ и } k}} (d_{ik} - \bar{d})^2 / \bar{d} = \chi^2,$$

т. е. при равных теоретических частотах мы имеем непосредственно величину χ^2 . Известно, что при $\bar{d} < 3 \div 5$ существуют затруднения в применении χ^2 -критерия. Но согласно Slakter [43], когда теоретические частоты одинаковы, χ^2 -аппроксимация для обычной статистики согласия является хорошей даже для $\bar{d} = 0,5$, а также для $\bar{d} = 0,25$. (Очень важный результат, полученный в следующих двух работах, состоит в том, что

эта аппроксимация хороша даже для $\bar{d}=0.1 \div 0.05$). Когда теоретические частоты одинаковы, степени свободы определяются как

$$(10) \quad \nu = \frac{n}{u+1} \frac{n}{v+1} - 2 = N - 2.$$

При помощи χ^2 , определяемого из (9), и ν из (10), можно использовать одну из лучших аппроксимаций для интеграла вероятностей χ^2 (Wilson, Hilferty [47]; см. также Garwood [48], Kendall и Stuart [49]), которая выражается тем, что величина

$$(11) \quad X = \left\{ \left(\frac{\chi^2}{\nu} \right)^{1/3} + \frac{2}{9\nu} - 1 \right\} \left(\frac{9\nu}{2} \right)^{1/2}$$

распределена нормально со средней 0 и дисперсией 1. Тогда вероятность, что $\chi^2 > \chi_0^2$, определяется из

$$(12) \quad P(\chi^2) = P(\chi^2 | \nu) \approx 2 [1 - \Phi(X)],$$

где $\Phi(X)$ — функция нормального распределения.

Идеализированная (и качественная) картина ожидаемых результатов, согласно изложенному методу, представлена на рис. 1, который является аналогом построенных впервые A b e l l [1, 3] подобных рисунков.

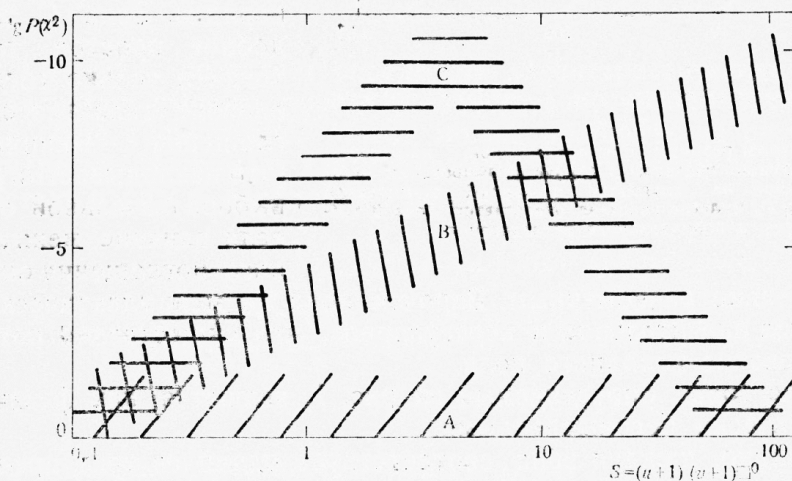


Рис. 1. Ожидаемые результаты согласно обобщенному χ^2 -методу — первое (эйбелевское) представление

По абсциссе обозначена площадь прямоугольников $S = (u+1)(v+1) \square^\circ$, на которые разбита исследуемая область, а по ординате — логарифм вероятностей отклонения от пуассоновского распределения. В случае формирования зоны А воспринимается нулевая гипотеза; В — нужно дополнительное исследование; С — нулевая гипотеза отвергается (т. е. скопления галактик второго порядка существуют) и характеристическая площадь соответствует $\min \lg P(\chi^2)$

1. Наличие зоны А в плоскости $\lg P(\chi^2), S \square^\circ$ означало бы восприятие нулевой гипотезы: распределение центров скоплений галактик является пуассоновским для всех разбиений. В таком случае тенденция к группированию не существует или, в рассматриваемом аспекте, скоплений галактик второго порядка не существует (по крайней мере, в исследуе-

мом поле и, по крайней мере, с характеристическими площадями, расположенными между элементарным квадратиком и всей областью).

2. Наличие зоны В означало бы, что с увеличением элементарных площадей характеристические размеры скоплений галактик второго порядка еще не достигнуты. Но если поле имеет значительную площадь,

зона В представляла бы указание на существование тенденции к группированию с непрерывным спектром (King, Saslaw [10], Vaucouleurs [12]).

3. Наличие зоны С нужно воспринять как самый серьезный довод в пользу существования скоплений галактик второго порядка. В этом случае нулевая гипотеза отвергается (принимается альтернативная), и тогда максимум (т. е. $\min P(\chi^2)$) соответствует характеристическим площадям скоплений второго порядка. Зона С имеет подобное простое толкование тогда и только тогда, когда влияние галактического поглощения минимизировано (что накладывает ограничение выбора начальной области) и если влияние межгалактического поглощения оказывается

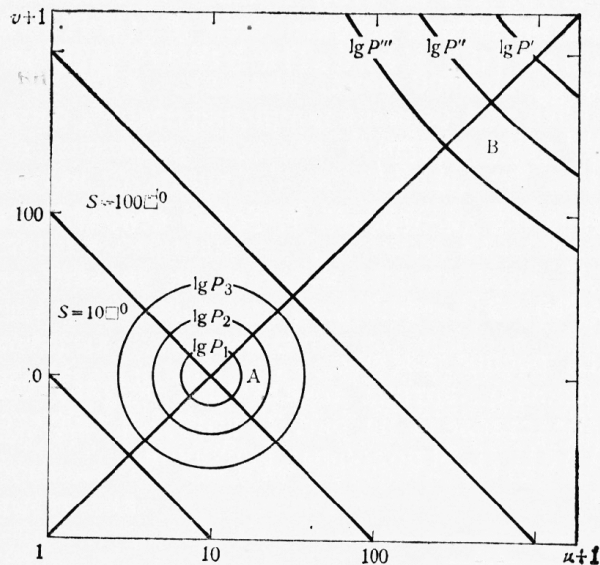


Рис. 2. Ожидаемые результаты — второе представление

По оси обозначены размеры прямоугольников, на которые разбита исследуемая область. В случае формирования зоны А, расположенной на диагонали $u+1=v+1$ и имеющей $\lg P_1 < \lg P_2 < \lg P_3$ нулевая гипотеза отвергается. Зона В требует дополнительного исследования

приблизительно равномерным. Впрочем, вряд ли межгалактическое поглощение такое значительное и нерегулярное, что существенно повлияло бы на исследование исходного поля.

Другие зоны, определяемые на рис. 1, являются как физически, так и математически бессмысленными.

Как видно, каждая зона соответствует одной из трех предлагаемых и разрабатываемых к настоящему времени модели распределения скоплений галактик.

В действительности, картина гораздо сложнее. Поскольку можно было бы ожидать, что самое лучшее представление для зоны С отвечало бы случаю $u=v=\text{const}$ (если скопления второго порядка по крайней мере приблизительно представляют сферические конфигурации) то, очевидно, для очень растяженных прямоугольников (например, $u+1=n$, $v=0$) соответствующие точки попадут в зону А, так как эффекты, вызванные из-за наличия скоплений второго порядка, маскируются при растяжении. Влияние некоторых других побочных эффектов (например, тип проекции области небесной сферы на плоскости) могло бы привести к образованию отдельных участков в зоне С (и при этом критика со стороны Yu, Rebles [37] вполне оправдана).

Результаты предлагаемого метода могут быть представлены, как указано на рис. 1. Иногда необходимо изучение эффектов, вызванных анизотропностью в начальном поле. Более полное представление можно получить с рисунка типа рис. 2. Размерность прямоугольников обозначена по координатным осям в логарифмическом масштабе. Очевидно, $S=10, 100 \square^\circ$, являются прямыми равных площадей. Изолинии связывают точки с одной и той же вероятностью отклонения (точнее, $\lg P(\chi^2)$) и их можно назвать изовероятностными линиями.

Если скопления второго порядка существуют, то ожидаемая картина будет подобна обозначенной конфигурации A , имеющей центр, расположенный на диагонали, и при этом $\lg P_1 < \lg P_2 < \lg P_3$. Все конфигурации, находящиеся в стороне от диагонали, нужно истолковать в смысле наличия анизотропности. Разброс центров конфигурации означал бы или набор нескольких группирований с разными характеристическими шкалами, или отсутствие эффектов группирования. В первом случае внутренние изовероятностные линии отличались бы по порядку значений от внешних.

Конфигурация B имеет смысл тогда, когда характеристические размеры группирования увеличиваются с площадью прямоугольников — т. е. характеристические размеры сравнимы с размерами всей области. При этом, естественно, $\lg P' < \lg P'' < \lg P'''$.

Дискуссия

Обобщенный χ^2 -метод позволяет определить характеристические размеры скоплений галактик второго порядка, естественно, только тогда, когда последние вообще существуют. Метод можно обобщить на случай трех и более измерений. Например, для кубической пространственной области с размерностью $n \times n \times n$, необходимо положить

$$(13) \quad \begin{aligned} i' &= \alpha + u(i-1) + p; \quad \alpha = 1, 2, \dots, \frac{n}{u+1}, \\ d_{\alpha\beta\gamma}(u+1, v+1, w+1) &= \sum_{p=0}^u \sum_{q=0}^v \sum_{s=0}^w d_{i'k'l'}, \quad k' = \beta + v(k-1) + q; \quad \beta = 1, 2, \dots, \frac{n}{v+1}, \\ l' &= \gamma + w(l-1) + s; \quad \gamma = 1, 2, \dots, \frac{n}{w+1}. \end{aligned}$$

Тогда число возможных разбиенок будет $\psi^3(n) - 1$.

В одномерном случае этот метод тоже применим. Тогда

$$(14) \quad d_\alpha(u+1) = \sum_{p=0}^u d'_i; \quad i' = \alpha + u(i-1) + p; \quad \alpha = 1, 2, \dots, \frac{n}{u+1},$$

и число возможных разбиений $\psi(n) - 1$.

По существу, обобщение не вносит ничего нового.

Можно заметить, что индекс группирования K , определенный в смысле Neuman и др. [42] для пуассоновских популяций, нельзя использовать вместе с величиной χ^2 . Но как показали специальные исследования, результаты обобщенного χ^2 -метода прекрасно согласуются с результатами, полученными на основе классического χ^2 -критерия (по методу Abell [1]), как и на основе критерия Cochrane [50] (см. также Rao [45]). Все-таки

убедительным аргументом для восприятия модели распределения галактик в пространстве, включающей скопления галактик второго порядка, является предложение Abell [1, 3]: если для разных по расстоянию групп скоплений $\min P(\chi^2)$ смещается таким образом, что средние линейные характеристические размеры скоплений второго порядка сохраняются постоянными (т. е. линейные размеры не зависят от расстояния), то зона С на рис. 1 действительно описывает существование структур второго порядка. Это означает, что шкала группирования сохраняется. (Впрочем, ничего удивительного нет в том, что тенденция к формированию скоплений второго порядка изменяется с расстоянием — тогда в рамках космологических моделей эволюлирующей Вселенной вполне возможно объяснение подобной констатации, если селективные эффекты будут, конечно, исключены.)

Интересно отметить то, что k , введенное Zwicky [40, 41], в наших обозначениях можно написать как

$$(15) \quad k^2 = [\sum (d_{ik} - \bar{d})^2 / N] : [\sum d_{ik} (1 - 1/N) / N]$$

и при N большом

$$(16) \quad (N-1) k^2 \approx \sum (d_{ik} - \bar{d})^2 / \bar{d},$$

которое совпадает с χ^2 из (9). (В числителе (15) — при оценке дисперсии делитель $N-1$, а не N ; во всех работах о проверке существования скоплений второго порядка, Цвикки и его сотрудники почему-то используют N , а не $N-1$, даже в случае $N=2$, например, [26, 30—33, 36]).

Большое преимущество предлагаемого метода состоит в том, что позволяет получение вероятности отклонений для всех возможных разбинок. Поэтому удачный выбор n является необходимым. В двумерном случае для первых 100 целых положительных чисел возможных разбиений 143 для $n=60, 72, 84, 90$ и 96 ; 99 для $n=48$ и 80 ; 80 для $n=36$ и 100 .

Обобщенный χ^2 -метод применим не только к проблеме существования скоплений галактик второго порядка, но и к широкому кругу статистических задач.

Литература

1. Abell, G. O. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **3**, 211, 1958.
2. Zwicky, F., E. Herzog, P. Wild, M. Karpowicz, C. T. Kowal. *Catalogue of Galaxies and of Clusters of Galaxies* (6 Vols), Pasadena, 1961—1968.
3. Abell, G. O. *Astron. J.*, **66**, 1961, 607.
4. Abell, G. O. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **3**, 1965, 1.
5. Abell, G. O. Paper presented at the 63 Symposium of IAU, 1973.
6. Abell, G. O., G. E. Seligman. *Astron. J.*, **70**, 1965, 317.
7. Abell, G. O., G. E. Seligman. *Astron. J.*, **72**, 1967, 288.
8. Караченцев, И. Д. *Астрофизика*, **2**, 1966, 307.
9. Kiang, T. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **135**, 1967, 1.
10. Kiang, T., W. C. Saslaw. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **143**, 1969, 129.
11. Гусак, А. И. *АЖ.*, **46**, 1969, 1231.
12. Vaucouleurs, G. de *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **83**, 1971, 113.
13. Калинин, М. *Изв. Секц. астрон.*, **5**, 1972, 165.
14. Калинин, М. *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, **26**, 1973, 1155.
15. Калинин, М. *Изв. Секц. астрон.*, **6**, 1973, 71.

16. Kalinkov, M. Proc. First Europ. Astron. Meet. Berlin, 3, 1974, 142.
17. Bogart, R. S., R. V. Wagoner. Astrophys. J., 181, 1973, 609.
18. Peebles, P. J. E. Astron. and Astrophys., 32, 1974, 197.
19. Peebles, P. J. E. Astrophys. J. Suppl. Ser., 252, 1974.
20. Peebles, P. J. E., M. C. Hauser. Astrophys. J. Suppl. Ser., 252, 1974.
21. Hauser, M. G., P. J. E. Peebles. Astrophys. J., 185, 1973, 757.
22. Zwicky, F. Morphological Astronomy. Berlin, 1957.
23. Zwicky, F. In: Hand. Phys., 53, 1959, 390. (русский перевод в „Строении звездных систем“. М., ИЛ, 1962, 456.
24. Zwicky, F., Adv. Astron. and Astrophys., 5, 1967, 267.
25. Zwicky, F., K. Rudnicki. Astrophys. J., 137, 1963, 707.
26. Zwicky, F., K. Rudnicki. Z. Astrophys., 64, 1966, 245.
27. Zwicky, F., J. Berger. Astrophys. J., 141, 1965, 34.
28. Zwicky, F., M. Karpowicz. Astrophys. J., 142, 1965, 625.
29. Zwicky, F., M. Karpowicz. Astrophys. J., 146, 1966, 43.
30. Karpowicz, M. Z. Astrophys., 66, 1967, 31.
31. Karpowicz, M. Z. Astrophys., 67, 1967, 139.
32. Karpowicz, M. Acta Astron., 20, 1970, 391.
33. Karpowicz, M. Acta Astron., 20, 1970, 305.
34. Karpowicz, M. Acta Astron., 21, 1971, 103.
35. Karpowicz, M. Acta Astron., 21, 1971, 115.
36. Karpowicz, M. Acta Astron., 21, 1971, 391.
37. Yu, J. T., P. J. E. Peebles. Astrophys. J., 158, 1969, 103.
38. Fullerton, W., P. Hoover. Astrophys. J., 172, 1972, 9.
39. Zwicky, F. Publ. Astron. Soc. Pacific, 50, 1938, 218.
40. Zwicky, F. Publ. Astron. Soc. Pacific, 64, 1952, 247.
41. Zwicky, F. Helvet. phys. acta, 26, 1953, 241.
42. Neyman, J., E. L. Scott, C. D. Shane. Astrophys. J. Suppl. Ser., 1, 1954, 269.
43. Slakter, M. J. Biometrika, 53, 1966, 619.
44. Kullback, S. Information Theory and Statistics. N. Y., 1958 (русский перевод: С. Кульбак. Теория информации и статистика. М., 1967).
45. Rao, C. R. Linear Statistical Inference and its Applications. N. Y., 1965 (русский перевод: С. Р. Рао. Линейные статистические методы и их применение. М., 1968).
46. Kendall, M. G., A. Stuart. The Advanced Theory of Statistics, v. II, London, 1961 (русский перевод: М. Кендалл, А. Стьюарт, Статистические выводы и связи. М., 1973).
47. Wilson, E. B., M. M. Hilferty. Proc. Nat. Acad. Sci., 17, 1931, 694.
48. Garwood, F. Biometrika, 28, 1936, 437.
49. Kendall, M. G., A. Stuart. The Advanced Theory of Statistics. London, 1958 (русский перевод: М. Кендалл, А. Стьюарт. Теория распределений. М., 1966).
50. Cochran, W. G. Biometrics, 10, 1954, 417.

Generalized χ^2 -Method for Investigation of the Problem for the Existence of Second-Order Clusters of Galaxies. I. Theory

M. Kalinkov

(Summary)

A method to determine the probability for deviation of an observed discrete random field from Poisson field is proposed. The possibilities of the method are examined, as well as the expected results in the case adoption of the null hypothesis (non-existence of clusters of points), or of the alternative hypothesis when the determination of characteristic sizes is possible. The method is developed for the two-dimensional case, but it is applicable for tests (mostly of fit) of some hypotheses in the one-dimensional, three-dimensional, etc. cases, with no restrictions for the examined problem.

*Сектор астрономии
Болгарской академии наук*

Поступила 18. VI. 1974 г.