БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА СЕКЦИЯТА ПО АСТРОНОМИЯ
BULLETIN OF THE SECTION OF ASTRONOMY
Том (Vol.) 1

ÜBER EINIGE EXAKTE LÖSUNGEN DER MEHRDIMENSIONALEN GRAVITATIONSTHEORIE, WELCHE ANWENDUNG IN DER ASTRONOMIE UND IN DER PHYSIK FINDEN KÖNNEN

Nikola St. Kalitzin

I. Die mehrdimensionale Räume finden letzter Zeit immer größere Anwendung in der Theorie der Elementarteilchen. Nach dem bekannten Theorem von Emmy Noether entspricht jeder Erhaltungssatz in der Physik, z. B. der Erhaltungssatz der Energie, der Bewegungsgröße usw. irgendwelcher Bewegungsmöglichkeit. So entspricht z. B. der Erhaltungssatz der Bewegungsgröße der Bewegungsfreiheit in die drei Richtungen des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes. Die Erhaltungssätze der elektrischen Ladung, des isotopischen Spines, der Strangeness der Baryonladung usw. können nicht nach dem Noetherschen Theorem durch Bewegungsmöglichkeiten im vierdimensionalen Raum von Minkowski — Einstein interpretiert werden und zeigen, daß man für die Beschreibung der Wechselwirkungen der Elementarteilchen Räume heranziehen muß, deren Anzahl der Dimensionen größer als vier ist. Die Lieschen Gruppen, welche mit Erfolg neulich für die Darstellung der Symmetrien bei den Elementarteilchen angewandt werden, bestätigen diese Auffassung. Auf Grund der obigen Überlegungen und aus der Forderung für größere logische Einfachheit sind wir in [1, 2, 3, 4] zu dem Schluß gekommen, daß der physikalische Raum mehrdimensional, sogar unendlich dimensional, ist. Sämtliche Superdimensionen in unserer Theorie sind zeitartig. Also ist die Signatur unserer Metrik

$$+1,\ +1,\ +1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\dots$$

Diese Annahme befreit uns von der Notwendigkeit zusätzliche Koordinatenbedingungen einzuführen, welche Bedingungen dem Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie widersprechen würden. Tatsächlich, wenn wir annehmen, daß eine der Superdimensionen raumartig ist, dann müßen wir irgendwie erklären können warum sich die Körper in diese neue Richtung nicht bewegen können, sondern bleiben sie ständig in unserem dreidimensionalen Raume stecken. Dies könnte erklärt werden, wenn man zusätzliche Koordinatenbedingungen annehmen würde wie z. B., daß die Welt in den neuen Dimensionen zylindrisch oder periodisch ist. In unserer Theorie bleiben die Körper ohne zusätzliche Bedingung für die Koordinaten in dem dreidimensionalen Raum, nur ist die Anzahl ihrer Bewegungsmöglichkeiten entsprechend der neuen „Zeiten" größer.

In den Arbeiten [3] und [4] haben wir eine mehrdimensionale Gravitationstheorie vorgeschlagen, wobei wir die Einsteinschen Vakuumgleichungen

$$R_{ik}=0, \quad i, k=1,\ldots, n+3, \tag{1}$$

für den $3+n$ dimensionalen Riemannschen Raum R_{3+n} verallgemeinert haben. Dabei haben wir in [3] die grundlegende Annahme gemacht, daß die Gleichung (1) nur das Gravitationsfeld im Raume R_{3+n} und kein anderes Feld beschreibt. Dadurch lehnen wir grundsätzlich die Versuche eine einheitliche Feldtheorie im mehrdimensionalen Raum R_{3+n} zu konstruieren ab. Das Gravitationsfeld, erscheint in unserer Theorie als mehrdimensional, genauer gesagt als mehrzeitig.

II. Wir versuchen hier eine hypersphärisch-symmetrische Lösung der Gravitationsgleichungen (1) im Raume R_{3+2} zu finden. Diese Lösung, wenn sie nicht trivial ist, wird eine Analogie zu der sphärisch-symmetrischen Schwarzschildschen Lösung und zu der zylindrisch-symmetrischen Lösung von Weyl und Levi-Civitta darstellen. Für diesen Zweck betrachten wir zunächst einen vierdimensionalen Unterraum R_{3+1} in R_{3+2}.

In einem ebenen vierdimensionalen Raum (der Raum von Minkowski) können wir die hypersphärische Koordinaten r, χ, θ, φ und die kartesische Koordinaten x, y, z, ct einführen. Dabei bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sh}\chi \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \operatorname{sh}\chi \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \operatorname{sh}\chi \cos\theta, \quad ct = \tau = r \operatorname{ch}\chi, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei

$$\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2 = r^2. \tag{3}$$

Das Linienelement ds wird in diesem Raum durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dr^2 - \\ &- r^2 (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi \, d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\chi \sin^2\theta \, d\varphi^2) \end{aligned} \tag{4}$$

gegeben. Das Linienelement ds im vierdimensionalen Raum der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie im Falle der hypersphärischen Symmetrie soll offenbar die Form

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu} (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi \, d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\chi \sin^2\theta \, d\varphi^2) = \\ &= -g_{ik} dx^i dx^k, \quad i, k=1, 2, 3, 4, \end{aligned} \tag{5}$$

besitzen, wobei λ und μ Funktionen von r sind. Die Koordinaten hier sind

$$x^1 = r, \quad x^2 = \chi, \quad x^3 = \theta, \quad x^4 = \varphi.$$

Wenn wir die Einsteinschen Gleichungen (1) für das Linienelement (5) aufstellen, i, $k=1$, 2, 3, 4, dann erhalten wir als einzige Beziehung für die Funktionen μ und λ

$$(\mu')^2 = 4e^{\lambda-\mu}. \tag{6}$$

Auf Grund von dieser Beziehung und ihrer ersten Ableitung verschwindet der Riemannscher Krümmungstensor R_{iklm} i, k, l, $m=1,\ldots, 4$, wie wir es in

[5] nachgewiesen haben. Also führt die hypersphärische Symmetrie im vierdimensionalen Raum mit Notwendigkeit zu der pseudoeuklidischen Metrik. Dasgleiche bekommen wir aber wenn wir die Gleichungen (1) für den sphärisch-symmetrischen Fall in R_3 lösen. Also um eine ähnliche Situation wie bei der Schwarzschildschen Lösung zu schaffen müßen wir den hypersphärisch-symmetrischen Fall im fünfdimensionalen Raum R_{3+2} in Betrachet ziehen. Das Linienelement wird in R_{3+2} im Falle der hypersphärischen Symmetrie die Form

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad ds^2 &= e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu}(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\, d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\chi \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \\
&+ e^{\nu} dl^2 = -g_{ik} dx^i dx^k, \quad i,\ k = 1, \ldots, 5,
\end{aligned}
$$

besitzen. Die Koordinaten lauten jetzt

$$x^1 = r,\ x^2 = \chi,\ x^3 = \theta,\ x^4 = \varphi,\ x^5 = l.$$

Wir nehmen an, daß λ, μ, ν Funktionen von r sind, was dem statischen Fall bei der sphärischen Symmetrie entspricht. Den allgemeineren Fall $\lambda = \lambda(r, l)$, $\mu = \mu(r, l)$, $\nu = \nu(r, l)$ entspricht dem nichtstatischem Fall, wird aber hier nicht betrachtet.

Der Fundamentaltensor besitzt die Komponenten

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&g_{11} = -e^{\lambda},\ g_{22} = e^{\mu},\ g_{33} = e^{\mu}\operatorname{sh}^2\chi, \\
&g_{44} = e^{\mu}\operatorname{sh}^2\chi \sin^2\theta,\ g_{55} = -e^{\nu}.
\end{aligned}
$$

Die Determinante g des metrischen Tensors wird durch den Ausdruck

$$g = e^{\lambda+3\mu+\nu}\operatorname{sh}^4\chi \sin^2\theta$$

gegeben. Wir bekommen noch

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
&g^{11} = \frac{1}{g_{11}} = -e^{-\lambda},\ g^{22} = e^{-\mu},\ g^{33} = e^{-\mu}\operatorname{sh}^{-2}\chi, \\
&g^{44} = e^{-\mu}\operatorname{sh}^{-2}\chi \sin^{-2}\theta,\ \ g^{55} = -e^{-\nu}.
\end{aligned}
$$

Die von Null verschiedenen Christoffelschen Symbole bekommen die Form

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2},\quad \Gamma^1_{22} = \frac{\mu'}{2} e^{\mu-\lambda},\quad \Gamma^1_{33} = \frac{\mu'}{2} e^{\mu-\lambda}\operatorname{sh}^2\chi,\quad \Gamma^1_{44} = \frac{\mu'}{2} e^{\mu-\lambda}\operatorname{sh}^2\chi\sin^2\theta, \\
&\Gamma^2_{12} = \frac{\mu'}{2},\quad \Gamma^2_{33} = -\operatorname{sh}\chi\operatorname{ch}\chi,\quad \Gamma^2_{44} = -\operatorname{sh}\chi\operatorname{ch}\chi\sin^2\theta,\quad \Gamma^3_{13} = \frac{\mu'}{2}, \\
&\Gamma^3_{23} = \operatorname{cth}\chi,\quad \Gamma^3_{44} = -\sin\theta\cos\theta,\quad \Gamma^4_{14} = \frac{\mu'}{2},\quad \Gamma^4_{24} = \operatorname{cth}\chi, \\
&\Gamma^4_{34} = \operatorname{cotg}\theta,\quad \Gamma^1_{55} = -\frac{1}{2} e^{\nu-\lambda}\nu',\quad \Gamma^5_{15} = \frac{1}{2}\nu'.
\end{aligned}
$$

Die Gravitationsgleichungen (1) ergeben dann für R_{3+2}:

$$R_{11} = -\frac{3}{2}\mu'' + \frac{3}{4}\lambda'\mu' - \frac{3}{4}(\mu')^2 - \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}(\nu')^2 = 0,$$

$$
(11) \qquad \begin{aligned}
&R_{22}=\frac{\mu''}{2}e^{\mu-\lambda}+\frac{3}{4}(\mu')^2e^{\mu-\lambda}-\frac{1}{4}\mu'\lambda'e^{\mu-\lambda}-2+\frac{1}{4}\mu'\nu'e^{\mu-\lambda}=0,\\
&R_{33}=R_{22}\,\mathrm{sh}^2\chi=0,\quad R_{44}=R_{22}\,\mathrm{sh}^2\chi\sin^2\theta=0,\\
&R_{55}=-\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu''-\frac{1}{4}e^{\nu-\lambda}(\nu')^2+\frac{1}{4}e^{\nu-\lambda}\lambda'\nu'-\frac{3}{4}e^{\nu-\lambda}\mu'\nu'=0.
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen für die Funktionen λ, μ und ν

$$(12) \qquad 6\mu''-3\lambda'\mu'+3(\mu')^2+2\nu''+(\nu')^2-\lambda'\nu'=0,$$

$$(13) \qquad \mu''+\frac{3}{2}(\mu')^2-\frac{1}{2}\mu'\lambda'+\frac{1}{2}\mu'\nu'-4e^{\lambda-\mu}=0,$$

$$(14) \qquad \nu''+\frac{1}{2}(\nu')^2-\frac{1}{2}\nu'\lambda'+\frac{3}{2}\nu'\mu'=0.$$

Aus (12), (13) und (14) ergibt sich durch Summation

$$(15) \qquad (\mu')^2+\mu'\nu'=4e^{\lambda-\mu},$$

$$(16) \qquad \mu'\nu''-\nu'\mu''+\mu'(\nu')^2+\nu'(\mu')^2=0.$$

(16) kann auch in der Form geschrieben werden (vorausgesetzt $\mu'\neq 0$ ist)

$$\frac{\nu''\mu'-\mu''\nu'}{\mu'^2}+\left(\frac{\nu'}{\mu'}\right)\nu'+\nu'=0,$$

oder

$$(17a) \qquad \left(\frac{\nu'}{\mu'}\right)'+\left(\frac{\nu'}{\mu'}\right)\nu'+\nu'=0,$$

oder auch

$$(17) \qquad \frac{\left(\frac{\nu'}{\mu'}\right)'}{\left(\frac{\nu'}{\mu'}\right)+1}=-\nu'.$$

Gleichung (17) läßt sich sofort integrieren und das Integral ist

$$(18) \qquad 1+\frac{\nu'}{\mu'}=Ae^{-\nu},$$

A — Integrationskonstante.

Aus (15) und (18) ergibt sich

$$(19) \qquad (\mu')^2=\frac{4}{A}e^{\lambda-\mu+\nu}.$$

Aus (19) erhalten wir durch Differentiation

$$(20) \qquad \mu''=\frac{1}{2}\mu'(\lambda'-\mu'+\nu').$$

Es ist leicht nachzuweisen, daß die Integrale (18) und (19) mit deren Ableitungen (16) und (20) die Feldgleichungen (12), (13) und (14) befriedigen. Also sind die Gleichungen (18) und (19) mit dem Gleichungssystem (12),

(13) und (14) gleichwertig. Dementsprechend haben wir für die Bestimmung von λ, μ und ν nur zwei unabhängige Gleichungen. Für die eindeutige Bestimmung von λ, μ und ν können wir folglich eine beliebige zusätzliche Bedingung hinzufügen, d. h, die Lösung unseres Problems hängt von einer beliebigen Funktion ab. Wir können z. B. den Ansatz machen

$$\lambda-\mu+\nu=0. \tag{21}$$

Dann ergibt sich aus (19)

$$\mu'=\pm\frac{2}{\sqrt{A}}. \tag{22}$$

Also

$$\mu=\pm\frac{2}{\sqrt{A}}\,r+A_1, \tag{23}$$

A_1 — eine Konstante. Aus (18) erhalten wir dann durch Differentiation

$$\pm\frac{\nu''\sqrt{A}}{2}+\nu'\pm\frac{\sqrt{A}}{2}\,(\nu')^2=0. \tag{24}$$

Das Integral von (24) lautet

$$\nu'=\frac{1}{\mp\frac{\sqrt{A}}{2}\pm A_2 e^{2r/\sqrt{A}}}, \tag{25}$$

A_2 — Integrationskonstante, und daraus ergibt sich

$$\nu=\mp\frac{2}{\sqrt{A}}\left[r-\frac{\sqrt{A}}{2}\ln\left(\mp\frac{\sqrt{A}}{2}\pm A_2 e^{\frac{2r}{\sqrt{A}}}\right)\right]+A_3, \tag{26}$$

A_3 — Konstante, $\lambda=\mu-\nu$.

Wir könnten natürlich auch andere Wahl treffen, z. B. $e^{\lambda-\mu}=1/r^2$ oder $\lambda=0$. Alle diese Fälle lassen sich elementar behandeln.

Wir wollen jetzt die grundlegende Frage untersuchen ob unsere Lösung in R_{3+2} ein wirkliches Gravitationsfeld darstellt oder ist das wieder eine besondere Darstellung der pseudoeuklidischen Metrik. Die Antwort dieser Frage wird bekanntlich durch die Untersuchung des Riemannschen Krümmungstensors gefunden. Wenn die Komponenten dieses Tensors nicht alle verschwinden, dann stellt die neue Metrik ein wirkliches Gravitationsfeld in R_{3+2} dar. Der Tensor R_{iklm} wird durch die Formel

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im}-\Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right) \tag{27}$$

gegeben. Die von Null verschiedene Komponenten von R_{iklm} sind

$$R_{1212}=\frac{1}{2}\,e^{\mu}\left(-\mu''-\frac{\mu'^2}{2}+\frac{1}{2}\,\mu'\lambda'\right)=-\frac{1}{4}\,e^{\mu}\mu'\nu',$$

$$
(28) \quad
\begin{aligned}
R_{2323} &= e^{\mu} \operatorname{sh}^2 \chi \left(\frac{\mu'^2}{4} e^{\mu-\lambda} - 1 \right) = e^{\mu} \operatorname{sh}^2 \chi \left(\frac{e^{\nu}}{A} - 1 \right), \\
R_{3131} &= -\frac{1}{4} e^{\mu} \operatorname{sh}^2 \chi \mu' \nu', \\
R_{1414} &= -\frac{1}{4} e^{\mu} \operatorname{sh}^2 \chi \sin^2 \theta \, \mu' \nu', \\
R_{2424} &= e^{\mu} \operatorname{sh}^2 \chi \sin^2 \theta \left(\frac{\mu'^2}{4} e^{\mu-\lambda} - 1 \right) = e^{\mu} \operatorname{sh}^2 \chi \sin^2 \theta \left(\frac{1}{A} e^{\nu} - 1 \right), \\
R_{3434} &= e^{\mu} \operatorname{sh}^4 \chi \sin^2 \theta \left(\frac{\mu'^2}{4} e^{\mu-\lambda} - 1 \right) = e^{\mu} \operatorname{sh}^4 \chi \sin^2 \theta \left(\frac{1}{A} e^{\nu} - 1 \right), \\
R_{1515} &= \frac{1}{2} e^{\nu} \left(\nu'' + \frac{1}{2} (\nu')^2 - \frac{1}{2} \nu' \lambda' \right) = -\frac{3}{4} e^{\nu} \nu' \mu'.
\end{aligned}
$$

Bei $\nu' \neq 0$ und folglich $\mu'^2 \neq 4 e^{\lambda-\mu}$, d. h. im Raume R_{3+2}, sind diese Komponenten von R_{iklm} von Null verschieden, womit nachgewiesen ist, daß unsere Lösungen wirkliche Gravitationsfelder in R_{3+2} darstellen.

Um den physikalischen Sinn der neuen Lösungen zu untersuchen, transformieren wir das Linienelement (5) in gewöhnlichen kartesischen Koordinaten x, y, z, $\tau = ct$, l, wobei wir die Transformationsformeln (2) und (3) benutzen ($l' = l$). Durch eine längere Berechnung erhalten wir das Resultat

$$
(29) \quad ds^2 = -\frac{e^{\mu}}{\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\tau^2) - \\
- \frac{(x dx + y dy + z dz - \tau d\tau)^2}{\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2} \left(\frac{e^{\mu}}{\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2} - e^{\lambda} \right) + e^{\nu} dl^2,
$$

wobei λ, μ, ν Funktionen von $\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2$ sind. Diese Funktionen sind durch die Beziehungen (18) und (19) verbunden. Offenbar stellt (29) sphärisch-symmetrische Gravitationswellen dar, welche sich mit der Lichtgeschwindigkeit c fortpflanzen.

Die neue Lösungen zeigen, daß das berühmte Theorem von Birkhoff, [6] nach welchem es keine sphärisch-symmetrische Gravitationswellen als Lösungen der Einsteinschen Gleichungen (1) im vierdimensionalen Raum R_{3+1} geben kann, für den fünfdimensionalen Raum R_{3+2} nicht gültig ist.

Die von uns erhaltenen neuen Lösungen der Gravitationsgleichungen (1), welche sphärisch-symmetrische Gravitationswellen darstellen, können bei der Strahlung von Gravitationswellen bei den pulsierenden Sternen eine Anwendung finden.

III. In diesem Kapitel wollen wir den Fall mit doppelter sphärischen Symmetrie in einem siebendimensionalen Riemannschen Raum R_{3+4} untersuchen. Die Lösung der Gleichungen (1) soll sphärisch-symmetrisch im raumartigen dreidimensionalen Unterraum und in einem dreidimensionalen zeitartigen Unterraum sein. Indem wir die Freiheit der Koordinatenwahl ausnützen, welche die doppelte sphärische Symmetrie nicht verletzt, können wir das Linienelement in R_{3+4} in der Form schreiben

$$
(30) \quad ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta \, d\Phi^2 + e^{\nu} d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2 + \varrho^2 \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2 + \\
+ e^{\sigma} (dx^7)^2 = -g_{ik} dx^i dx^k, \quad i, k = 1, \ldots, 7,
$$

Wir beschäftigen uns hier mit dem „statischen" Fall $\lambda=\lambda(r, \varrho)$, $\nu=\nu(r, \varrho)$, $\sigma=\sigma(r, \varrho)$. Der allgemeine Fall wäre $\lambda=\lambda(r, \varrho, x^7)$, $\nu=\nu(r, \varrho, x^7)$, $\sigma=\sigma(r, \varrho, x^7)$ aber er wird uns hier nicht interessieren. Unsere Koordinaten sind

$$x^1=r,\ x^2=\theta,\ x^3=\Phi,\ x^4=\varrho,\ x^5=\vartheta,\ x^6=\varphi,\ x^7.$$

Der Fundamentaltensor hat die Komponenten

$$\begin{aligned}&g_{11}=e^\lambda, \quad g_{22}=r^2, \quad g_{33}=r^2\sin^2\theta,\\ &g_{44}=-e^\nu,\ g_{55}=-\varrho^2,\ g_{66}=-\varrho^2\sin^{-2}\vartheta,\ g_{77}=-e^\sigma\end{aligned}\tag{31}$$

und

$$\begin{aligned}&g^{11}=e^{-\lambda}, \quad g^{22}=r^{-2}, \quad g^{33}=r^{-2}\sin^{-2}\theta,\\ &g^{44}=-e^{-\nu},\ g^{55}=-\varrho^{-2},\ g^{66}=-\varrho^{-2}\sin^{-2}\vartheta,\ g^{77}=-e^{-\sigma}.\end{aligned}\tag{32}$$

Die von Null verschiedenen Christoffelschen Symbole werden durch die Ausdrücke gegeben

$$\begin{aligned}&\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1},\quad \Gamma^1_{14}=\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial x^4},\quad \Gamma^1_{22}=-e^{-\lambda}r,\quad \Gamma^1_{33}=-e^{-\lambda}r\sin^2\theta,\\ &\Gamma^1_{44}=\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{\partial\nu}{\partial x^1},\quad \Gamma^2_{12}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\quad \Gamma^1_{77}=\frac{1}{2}e^{\sigma-\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial x^1},\\ &\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^3_{23}=\operatorname{cotg}\theta,\quad \Gamma^4_{11}=\frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}\frac{\partial\lambda}{\partial x^4},\quad \Gamma^4_{14}=\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial x^1},\quad \Gamma^4_{44}=\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial x^4},\\ &\Gamma^4_{55}=-e^{-\nu}\varrho,\quad \Gamma^5_{45}=\frac{1}{\varrho},\quad \Gamma^4_{66}=-e^{-\nu}\varrho\sin^2\vartheta,\quad \Gamma^5_{66}=-\sin\vartheta\cos\vartheta.\\ &\Gamma^6_{46}=\frac{1}{\varrho},\quad \Gamma^6_{56}=\operatorname{cotg}\vartheta,\quad \Gamma^4_{77}=-\frac{1}{2}e^{\sigma-\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x^4},\quad \Gamma^7_{17}=\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x^1},\ \Gamma^7_{47}=\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}.\end{aligned}\tag{33}$$

Die Gravitationsgleichungen im leeren Raum (1) bekommen in diesem Fall die Form

$$\begin{aligned}R_{11}=&\frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^4}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial x^4}\frac{\partial\lambda}{\partial x^4}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^{4\,2}}+\frac{2}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x^4}\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\nu}{\partial x^{1\,2}}+\\ &+\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\frac{1}{r}+\frac{1}{4}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\frac{\partial\nu}{\partial x^1}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\nu}{\partial x^1}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^{1\,2}}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}\right)^2+\\ &+\frac{1}{4}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}+\frac{1}{4}e^{\lambda-\nu}\frac{\partial\lambda}{\partial x^4}\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{14}=&\frac{\partial\lambda}{\partial x^4}\frac{1}{r}+\frac{\partial\nu}{\partial x^1}\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^1\partial x^4}-\frac{1}{4}\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}+\frac{1}{4}\frac{\partial\lambda}{\partial x^4}\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}+\\ &+\frac{1}{4}\frac{\partial\nu}{\partial x^1}\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}=0,\end{aligned}$$

$$R_{22}=-\frac{1}{2}e^{-\lambda}r\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}+1+\frac{1}{2}e^{-\lambda}r\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}-\frac{\partial\nu}{\partial x^1}\right)-e^{-\lambda}=0,$$

$$R_{33}=R_{22}\sin^2\theta=0,$$

(34) $$R_{44}=\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\nu}{\partial x^1}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\frac{\partial\nu}{\partial x^1}+\frac{\partial^2\nu}{\partial x^{1\,2}}+\frac{2}{r}\frac{\partial\nu}{\partial x^1}\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^{4\,2}}+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{\partial\nu}{\partial x^4}\frac{\partial\lambda}{\partial x^4}+\frac{\partial\nu}{\partial x^4}\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^4}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^{4\,2}}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{4}e^{\nu-\lambda}\frac{\partial\nu}{\partial x^1}\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}+\frac{1}{4}\frac{\partial\nu}{\partial x^4}\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}=0,$$

$$R_{55}=1+\frac{1}{2}e^{-\nu}\varrho\left(\frac{\partial\nu}{\partial x^4}-\frac{\partial\lambda}{\partial x^4}-\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}\right)-e^{-\nu}=0,$$

$$R_{66}=R_{55}\sin^2\vartheta=0,$$

$$R_{77}=\frac{1}{2}e^{\sigma-\lambda}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^{1\,2}}-\frac{1}{2}e^{\sigma-\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^{4\,2}}+$$

$$+\frac{1}{2}e^{\sigma-\lambda}\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}+\frac{2}{r}+\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial x^1}+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}e^{\sigma-\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial x^4}-\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial x^4}+\frac{2}{\varrho}+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}\right)=0.$$

Die übrigen Komponenten von R_{ik} haben keine von Null verschiedene Glieder. Wenn wir in (34) $\nu=0,\ \frac{\partial}{\partial x^4}=0$ ansetzen, dann erhalten wir

(35) $$\begin{aligned}
R_{11}&=\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^{1\,2}}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\frac{\partial\sigma}{\partial x^1}=0,\\
R_{22}&=1+\frac{1}{2}e^{-\lambda}r(\lambda'-\sigma')-e^{-\lambda}=0,\\
R_{77}&=\frac{1}{2}e^{\sigma-\lambda}\sigma''+\frac{1}{2}e^{\sigma-\lambda}\sigma'\left(-\frac{1}{2}\lambda'+\frac{2}{r}+\frac{1}{2}\sigma'\right)=0,\\
R_{14}&=R_{44}=R_{55}=0,
\end{aligned}$$

d. h. die Differentialgleichungen von Schwarzschild (vergl. z. B. [7])

Wenn wir aber $\lambda=0,\ \frac{\partial}{\partial x^1}=0$ in (34) einsetzen, dann erhalten wir

(36) $$\begin{aligned}
R_{11}&=R_{14}=R_{22}=0,\\
R_{44}&=\frac{\partial\nu}{\partial x^4}\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^{4\,2}}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{\partial\nu}{\partial x^4}\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}=0,\\
R_{55}&=1+\frac{1}{2}e^{-\nu}\varrho\left(\frac{\partial\nu}{\partial x^4}-\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}\right)-e^{-\nu}=0,\\
R_{77}&=-\frac{1}{2}e^{\sigma-\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^{4\,2}}-\frac{1}{2}e^{\sigma-\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial x^4}+\frac{2}{\varrho}+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial x^4}\right)=0,
\end{aligned}$$

d. h. wieder die Differentialgleichungen von Schwarzschild. Also im vierdimensionalen Raume mit der Signatur der Metrik $+1,\ +1,\ +1,\ +1$ bekommen wir im sphärisch-symmetrischen Fall wieder die Schwarzschildschen Lösung.

Wir betrachten jetzt den folgenden Spezialfall in R_{3+4}

(37) $$r\equiv\varrho,\qquad \frac{\partial}{\partial x^1}=\frac{\partial}{\partial x^4}.$$

Die Feldgleichungen (34) ergeben in diesem Falle

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{1}{2} e^{\lambda-\nu} \left[\frac{1}{2} \lambda'' - \frac{1}{2} \lambda' \nu' + \lambda'' + \frac{2}{r} \lambda'\right] - \frac{1}{2} \nu'' + \lambda' \frac{1}{r} + \frac{1}{4} \lambda' \nu' - \\
&\quad - \frac{1}{4} \nu'^2 - \frac{1}{2} \sigma'' - \frac{1}{4} \sigma'^2 + \frac{1}{4} \lambda' \sigma' + \frac{1}{4} e^{\lambda-\nu} \lambda' \sigma' = 0, \\
R_{14} &= \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\sigma''}{2} - \frac{\sigma'^2}{4} + \frac{\lambda'\sigma'}{4} + \frac{\nu'\sigma'}{4} = 0, \\
R_{22} &= 1 + \frac{1}{2} e^{-\lambda} r(\lambda' - \nu' - \sigma') - e^{-\lambda} = 0, \\
R_{44} &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \left[\frac{1}{2} \nu'^2 - \frac{1}{2} \lambda' \nu' + \nu'' + \frac{2}{r} \nu'\right] - \frac{1}{2} \lambda'' + \frac{1}{4} \nu' \lambda' + \frac{\nu'}{r} - \\
&\quad - \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\sigma''}{2} - \frac{\sigma'^2}{4} + \frac{e^{\nu-\lambda}}{4} \nu' \sigma' + \frac{\nu'\sigma'}{4} = 0, \\
R_{55} &= 1 + \frac{1}{2} e^{-\nu} r(\nu' - \lambda' - \sigma') - e^{-\nu} = 0, \\
R_{77} &= \frac{1}{2} e^{\sigma-\lambda} \sigma'' - \frac{e^{\sigma-\nu}}{2} \sigma'' + \frac{1}{2} e^{\sigma-\lambda} \sigma' \left(-\frac{\lambda'}{2} + \frac{2}{r} + \frac{\nu'}{2} + \frac{\sigma'}{2}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2} e^{\sigma-\nu} \sigma' \left(\frac{1}{2} \lambda' - \frac{1}{2} \nu' + \frac{2}{r} + \frac{\sigma'}{2}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{38}
$$

Aus (38) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
e^{\nu-\lambda} R_{11} + R_{44} &= \frac{1}{r} (\lambda' + \nu') + e^{\nu-\lambda} \frac{1}{r} (\lambda' + \nu') + \frac{1}{4} \sigma' (\lambda' + \nu') + \\
&\quad + \frac{1}{4} e^{\nu-\lambda} \sigma' (\lambda' + \nu') - \left(\frac{1}{2} \sigma'' + \frac{1}{4} \sigma'^2\right)(1 + e^{\nu-\lambda}) = 0,
\end{aligned}
$$

oder

$$
\frac{1}{2} \sigma'' + \frac{1}{4} \sigma'^2 = \frac{1}{r} (\lambda' + \nu') + \frac{1}{4} \sigma' (\lambda' + \nu'). \tag{39}
$$

Diegleiche Gleichung folgt auch unmittelbar aus $R_{14}=0$ in (38). Aus $R_{22}=0$ und $R_{55}=0$ in (38) ergibt sich

$$
\sigma' = \frac{e^{\lambda} + e^{\nu} - 2}{r}. \tag{40}
$$

Aus $R_{77}=0$ in (38) und aus (39) erhalten wir

$$
R_{77} = \frac{1}{2} (e^{\sigma-\lambda} - e^{\sigma-\nu})(\lambda' + \nu' + \sigma') + \frac{1}{2} \sigma' (e^{\sigma-\lambda} \nu' - e^{\sigma-\nu} \lambda') = 0. \tag{41}
$$

Diese Gleichung wird identisch befriedigt wenn wir darin

$$
\lambda = \nu. \tag{42}
$$

ansetzen. Mit demselben Ansatz werden auch $R_{11}=0$ und $R_{44}=0$ in (38) identisch befriedigt, wenn man dazu noch die Beziehung (39) berücksichtigt. In diesem Fall reduziert sich das Gleichungssystem (38) zu den beiden Gleichungen

(43) $$\sigma' = \frac{2e^{\lambda}-2}{r},$$

(44) $$\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'^2 = 4\frac{\lambda'}{r} + \sigma'\lambda'.$$

Aus (43) ergibt sich durch Differentiation

(45) $$\sigma'' = -\frac{2e^{\lambda}-2}{r^2} + \frac{2}{r}e^{\lambda}\lambda'.$$

Aus (44) und (45) erhalten wir

(46) $$\lambda' = \frac{e^{\lambda}-1}{r}(e^{\lambda}-2).$$

oder

(47) $$\frac{d\lambda}{(e^{\lambda}-1)(e^{\lambda}-2)} = \frac{dr}{r}.$$

Wir setzen an

(48) $$e^{\lambda} = u, \quad e^{\lambda}\,d\lambda = du, \quad d\lambda = \frac{du}{u}$$

Also

(49) $$\frac{du}{u(u-1)(u-2)} = \frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\frac{du}{u} - \frac{du}{u-1} + \frac{1}{2}\frac{du}{u-2}.$$

Das Integral von (49) lautet

(50) $$r = A\,\frac{u^{1/2}(u-2)^{1/2}}{u-1},$$

A — eine Integrationskonstante. Oder

(51) $$r^2 = A^2\,\frac{e^{\lambda}(e^{\lambda}-2)}{(e^{\lambda}-1)^2}.$$

Aus (51) ergibt sich

(52) $$e^{\lambda} = e^{\nu} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-(r^2/A^2)}}.$$

Aus (52) und (43) bekommen wir

(53) $$\sigma' = \pm\frac{2}{r\sqrt{1-(r^2/A^2)}}.$$

Die Integration der Gleichung (53) ergibt

(54) $$e^{\sigma} = B\,\frac{r^2}{[1+\sqrt{1-(r^2/A^2)}]^2},$$

oder

(55) $$e^{\sigma} = B\,\frac{[1+\sqrt{1-(r^2/A^2)}]^2}{r^2}$$

B — Integrationskonstante.

Die Ausdrücke (52) und (54) zeigen, daß unsere Lösung eine Welt darstellt, welche Grenze für $r=A$ hat. An dieser Grenze wird der Fundamentaltensor singulär. Für $r>A$ bekommt der metrische Tensor komplexe Werte, d. h. unsere Lösung ist außerhalb der Grenze $r=A$ nicht fortsetzbar. Wir können aber diese Lösung an der Grenze zusammennähen, sodaß wir das Modell eines Teilchens bekommen werden. Innerhalb der Grenze $r=A$ hat das Gravitationsfeld nach (52) und (53) zwei verschiedene Vorzeichen. Diese Lösungen können Teilchen mit positiver und negativer Gravitations und Trägheitsmasse darstellen. Sie können manche Anwendungen in der Physik wie in der Astrophysik finden.

Nach den Berichten von Terletsky [8] und Hoffmann [9] können die Teilchen mit negativer Gravitations und Trägheitsmasse bei den Quasarn und bei anderen explodierenden Objekten im Kosmos eine Rolle spielen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. Kalitzin, N. St. Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Math.-Nat. R., VII, 2, 1957/1958, 207.
2. Калицин Н. Ст., Известия на Физическия институт при БАН (Kalitzin N. St., Bulletin de l'Institut de physique de l'Acad. bulg. Sci.), **7**, 1959, 219,
3. Калицин Н. Ст., Известия на Физическия институт при БАН (Kalitzin N. St., Bulletin de l'Institut de physique de l'Acad. bulg. Sci.), **15**, 1966, 91.
4. Калицин Н. Ст., Известия на Физическия институт при БАН (Kalitzin N. St., Bulletin de l'Institut de physique de l'Acad. bulg. Sci.), **15**, 1966, 81.
5. Калицин Н. Ст., Известия на Физическия институт при БАН (Kalitzin N. St. Bulletin de l'Institut de physique de l'Acad. bulg. Sci., **9**, 1, 1961, 143.
6. Birkhoff G. D., Relativity and Modern Physics, Harvard University Press, Cambridge, 1923.
7. Eddington, A. S., Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, Springer, Berlin, 1925.
8. Terletsky Ya. P., International Conference on Relativistic Theories of Gravitation, II, London, July, 1965.
9. Hoffmann B., International Conference on Relativistic Theories of Gravitation, II, London, July, 1965.

ВЪРХУ НЯКОИ РЕШЕНИЯ НА МНОГОМЕРНАТА ГРАВИТАЦИОННА ТЕОРИЯ, КОИТО МОГАТ ДА НАМЕРЯТ ПРИЛОЖЕНИЕ В АСТРОНОМИЯТА

Н. Ст. Калицин

(Резюме)

В работата авторът намира някои важни решения на обобщените Айнщайнови гравитационни уравнения с дясна част, равна на нула за петмерното и седеммерно Риманови пространства.

В петмерното Риманово пространство се разглежда случаят с хиперсферична четиримерна симетрия. Тази симетрия опростява твърде много Айнщайновите уравнения и дава възможност на автора да получи едно строго

решение на същите уравнения, което решение е аналогично на важното решение на Шварцшилд за четиримерното Риманово пространство с обикновена сферична симетрия. При това Римановият тензор на кривината не се равнява на нула, т. е. намереното ново строго решение представлява едно истинско гравитационно поле и не се свежда до тривиалния случай на евклидовата метрика. Авторът показва, че новото решение може да представи реални гравитационни вълни, разпространяващи се със скоростта на светлината. Тези вълни притежават пространствена сферична симетрия, с което се доказва, че известната теорема на Биркхоф за несъществуването на сферично симетрични гравитационни вълни в общата теория на относителността за петмерното Риманово пространство не е в сила. Полученото ново строго решение може да намери редица важни приложения в астрономията като излъчване на гравитационни вълни от пулсиращи звезди и пр.

Във втората част на работата авторът разглежда обобщените Айнщайнови гравитационни уравнения с дясна част, равна на нула за едно седеммерно Риманово пространство, в което новите три измервания имат времениподобен характер. Авторът търси решения в случая на двойна сферична симетрия, една в пространственовидното подпространство и друга в тримерното времевидно подпространство. В един частен случай авторът получава строги решения, отговарящи на тела с положителни и отрицателни гравитационни и инерчни маси. Тези решения реализират предположенията на Терлецки и Хофман и съгласно тяхните идеи могат да играят важна роля при обяснението на някои явления в астрофизиката, свързани с излъчването на огромни количества енергия.