БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

ИЗВЕСТИЯ НА СЕКЦИЯТА ПО АСТРОНОМИЯ

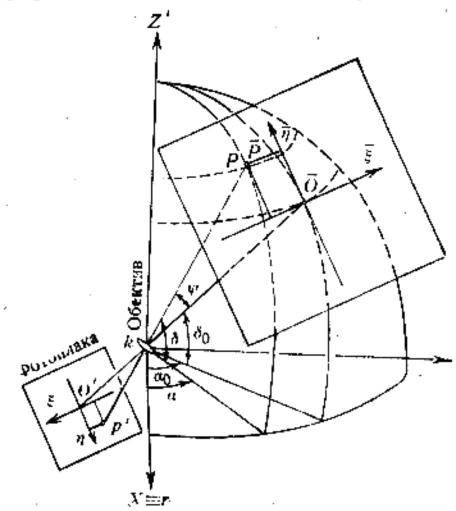
BULLETIN OF THE SECTION OF ASTRONOMY

Том (Vol.) IV.

ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ЕКВАТОРИАЛНИТЕ ТОПОЦЕНТРИЧНИ КООРДИНАТИ НА ИЗКУСТВЕНИТЕ СПЪТНИЦИ НА ЗЕМЯТА ПОСРЕДСТВОМ ИЗЧИСЛЕНИ РАЗСТОЯНИЯ ОТ ФОТОГРАФИЧЕСКИ НАБЛЮДЕНИЯ

Н. Георгиев, Цв. Даракчиев

Чрез фотографски наблюдения на изкуствените спътници на Земята (ИСЗ) се определят екваториалните координати на спътника, които служат като изходни данни за различни изчисления при космическата геодезия, астрономия и геофизика. Значението на така определяните координати доведе до много научни изследвания, публикации и десетки доклади на международните симпозиуми и конференции по методите за обработка на фотоплаките и изчислението на екваториалните координати на спътника. Публикувани бяха начини за ускорение или автоматизиране на изчисленията при класическия метод на Тернер [1]; методи за определяне на координати чрез две звезди посредством сферични ъгли [2], чрез три звезди [3], чрез четири звезди без знанието на оптическия център [4] или без отчитането на някои корекции, като диференциална аберация, диференциална рефракция и дисторсия.



Фиг. 1

В резултат на фотографските наблюдения се получава върху фотоплака (фотолента) изображение на спътника на фона на звездното небе. В случая ще разглеждаме получената фотоплака като изображение, което се получава при гномонната проекция, но натоварено с всички грешки, специфични за фотографските наблюдения на спътниците (фиг. 1).

За извеждането на екваториалните топоцентрични координати на спътника α_c, δ_c за приетия синхронен момент t_c разполагаме със следната информация:

1. Определени (от измерените стойности x_i, y_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ на прекъсванията на следата на спътника) чрез изравнение по метода на най-малките квадрати образни координати x_c, y_c за момента t_c.

2. Измерени стойности x_j, y_j на образите на опорните звезди $(j=1, 2, \ldots, r)$.

3. Екваториалните координати α_j, δ_j $(j=1, 2, \ldots r)$ на опорните звезди, получени от звезден каталог (например SAO).

4. Изчислени тангенциални (идеални) координати на звездите ξ_j, η_j $(j=1, 2, \ldots r)$ по изразите

$$\xi_j=\frac{\operatorname{ctg}\delta_j \cdot \sin(\alpha_j-\alpha_0)}{\sin\delta_0+\operatorname{ctg}\delta_j\cos\delta_0\cos(\alpha_j-\alpha_0)},\tag{1}$$
$$\eta_j=\frac{\cos\delta_0-\operatorname{ctg}\delta_j\sin\delta_0\cos(\alpha_j-\alpha_0)}{\sin\delta_0+\operatorname{ctg}\delta_j\cos\delta_0\cos(\alpha_j-\alpha_0)},$$

където α_0, δ_0 са екваториалните координати на оптическия център O'.

Цялата тази информация е необходима за определянето на тангенциалните координати ξ_c, η_c на спътника и получаването по формулите

$$q_c=\delta_0+\operatorname{arctg}\eta_c,\tag{2}$$

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(\alpha_c-\alpha_0)=\xi_c\cos(q_c-\delta_0)\sec q, \\ \operatorname{tg}\delta_c=\operatorname{tg}q_c\cos(\alpha_c-\alpha_0)\end{cases}\tag{3}$$

на екваториалните координати α_c, δ_c.

Следователно достатъчно е получаването на идеалните координати на спътника, за да могат да се получат и екваториалните му координати.

Тук ще дадем един начин за изчислението на идеалните координати на спътника посредством изчислени разстояния между звездите и звездите и спътника. Ще разгледаме случая с две звезди и при повече от необходимия брой звезди чрез изравнение по метода на най-малките квадрати.

I

Нека върху получената фотографска плака имаме две звезди, образа на спътника и цялата ни необходима информация за изчислението на тангенциалните координати на спътника.

От измерените величини x, y се изчисляват разстоянията $\overline{S}_{1,2}$, $\overline{S}_{1,c}$, $\overline{S}_{2,c}$ и посочните ъгли $T'_{1,2}$, $T'_{1,c}$, $T'_{2,c}$ по формулите

$$\overline{S}_{ij}=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2},\tag{4}$$

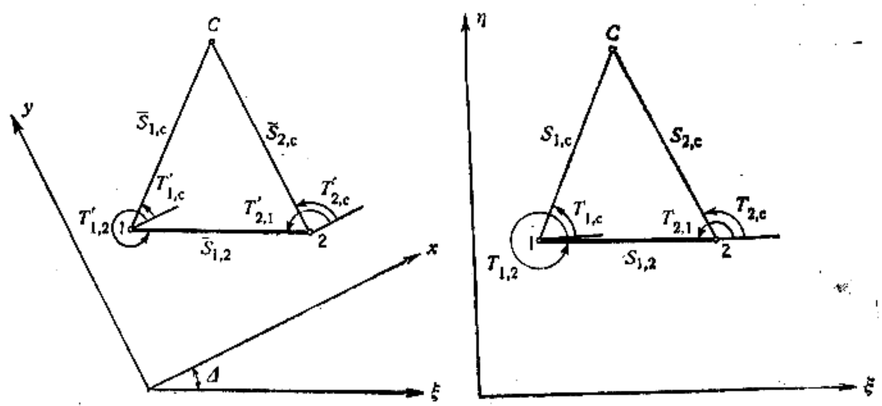
$$\operatorname{tg}T'_{ij}=\frac{y_j-y_i}{x_j-x_i}, \text{ където } (i=1, 2, \; i+j=2, c).\tag{5}$$

От изчислените тангенциални координати ξ_i, η_i $(i=1, 2)$ на звездите се получава разстоянието $S_{1,2}$ и посочният ъгъл $T_{1,2}$ по изразите

$$S_{1,2}=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2},\tag{6}$$

$$\operatorname{tg}T_{1,2}=\frac{\eta_2-\eta_1}{\xi_2-\xi_1}.\tag{7}$$

Получените величини по (6) и (7) трябва да разглеждаме като твърди стойности, тъй като тяхното изчисление е извършено посредством координатите ξ_i, η_i, свободни от всички грешки, характерни за фотографските наблюдения.



Фиг. 2

От (4), (5), (6) и (7) може да определим двата фактора

$$\mu = \frac{S_{1,2}}{\bar{S}_{1,2}}, \tag{8}$$

$$\Delta = T_{1,2} - T'_{1,2}, \tag{9}$$

които ни дават мащаба на деформацията в страната $\bar{S}_{1,2}$ и завъртването на координатната система x, y спрямо ξ, η. Ако приемем, че така получените μ и Δ (в тази малка околност, в която се извършва изчислението на координатите на спътника) са константни, то може да коригираме $\bar{S}_{1,c}$, $\bar{S}_{2,c}$, $T'_{1,c}$ и $T'_{2,c}$ по изразите

$$S_{i,c} = \mu \bar{S}_{i,c}, \tag{10}$$

$$T_{i,c} = T'_{i,c} + \Delta, \quad (i = 1, 2). \tag{11}$$

С така получените величини изчисляваме тангенциалните координати на спътника

$$\xi_c^{(i)} = \xi_i + S_{i,c} \cos T_{i,c}, \tag{12}$$

$$\eta_c^{(i)} = \eta_i + S_{i,c} \sin T_{i,c}, \quad (i = 1, 2). \tag{13}$$

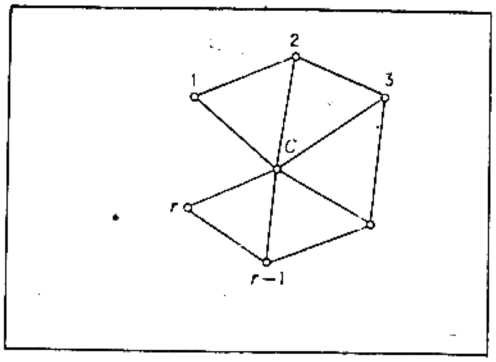
II

Сега ще разгледаме случая, когато се разполага с повече от две опорни звезди, т. е. имаме свръхизмервания. Наличието на повече от необходимия брой звезди ($r > 2$) дава възможност задачата да се реши чрез изравнение по метода на най-малките квадрати.

За целта ще приемем, че за избраните r на брой звезди имаме цялата необходима информация, дадена в точките от 1 до 4, и по формулите 4÷13 е изчислена една приблизителна стойност — ξ_c^0, η_c^0 за спътника.

От измерените стойности на координатите x_i, y_i на звездите и x_c, y_c на спътника за синхронния момент могат да бъдат получени разстоянията звезда — спътник и звезда — звезда. При това ще приемем, че са изчислени само необходимите на брой страни, звезда — звезда, а не всички възможни комбинации.

Тъй като в случая изравнението ще се извърши по условен начин, необходимо е да бъдат определени $2r-1$ уравнения. При това уравненията на звезда — спътник ще са r на брой, а за звезда — звезда — $r-1$.



Фиг. 3

Или достатъчно е да бъдат определени страните между съседните звезди, като една страна бъде изпусната (или, както е показано на фиг. 3, необходимо е да се изчислят страните $[1-2]$, $[2-3]$, ... $[(r-1)-r]$ без изчислението на страната $[r-1]$),

т. е. $[i-j]$

$(i=1, 2, \dots r-1)$,

$(j=i+1)$.

Разстоянията, изчислени от тангенциалните кординати на звездите

$$S^2_{i,k}=(\zeta_k-\zeta_i)^2+(\eta_k-\eta_i)^2, \quad (k=j, c), \tag{14}$$

може да се разглеждат като действителни разстояния.

Ако желаем да получим същите разстояния от измерените координати x_i, x_k, y_i, y_k $(k=j,c)$, последните трябва да бъдат коригирани така, че получените S_{ik} да бъдат равни на изчислените по (14), т. е.

$$S^2_{i,k}=(1+\mu)^2[(x_k+v_{x_k})-(x_i+v_{x_i})]^2+(1+\nu)^2[(y_k+v_{y_k})-(x_i+v_{x_i})]^2, \tag{15}$$

където $(1+\mu)$ и $(1+\nu)$ са мащабите на деформациите на координатите x, y, а v_x и v_y са поправките към измерените координати.

Нека сега въведем и неизвестни към приблизително изчислените стойности ξ^0_c, η^0_c, а именно:

$$\begin{aligned}\xi_c&=\xi^0_c+\delta\xi,\\ \eta_c&=\eta^0_c+\delta\eta.\end{aligned} \tag{16}$$

От (14), (15) и (16) получаваме

$$\begin{aligned}&[(x_c+\mu x_c+v_{x_c})-(x_i+\mu x_i+v_{x_i})]^2+[(y_c+\nu y_c+v_{y_c})-(y_i+\nu y_i+v_{y_i})]^2=\\&=(\xi^0_c+\delta\xi-\xi_i)^2+(\eta^0_c+\delta\eta-\eta_i)^2, \quad (i=1, 2, \dots r).\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&[(x_j+\mu x_j+v_{x_j})-(x_i+\mu x_i+v_{x_i})]^2+[(y_j+\nu y_j+v_{y_j})-(y_i+\nu y_i+v_{y_i})]^2=\\&=(\xi_j-\xi_i)^2+(\eta_j-\eta_i)^2, \quad (i=1, 2, \dots r-1; \ j=i+1).\end{aligned} \tag{18}$$

След привеждане в линеен вид получаваме

$$(19)\quad a_{i,1}v_{x_c}+a_{i,2}v_{y_c}+a_{i,k}v_{x_i}+a_{i,k+1}v_{y_i}+b_{i,1}\mu+b_{i,2}\nu+b_{i,3}\delta\xi+b_{i,4}\delta\eta+W_i=0,$$

$$(20)\quad a_{r+i,k}v_{x_i}+a_{r+i,k+1}v_{y_i}+a_{r+i,k+2}v_{x_j}+a_{r+i,k+3}v_{y_j}+b_{r+i,1}\mu+b_{r+i,2}\nu+W_{r+i}=0,$$

$$(k=2i+1),$$

където сме поставили съкращенията

$$(21)\quad \begin{array}{lll}
a_{i,1}=x_c-x_i, & b_{i,1}=(x_c-x_i)^2, & W_i=\dfrac{\overline{S}^2_{i,c}}{2}-\dfrac{S^{0^2}_{i,c}}{2}, \\
a_{i,2}=y_c-y_i, & b_{i,2}=(y_c-y_i)^2, & \\
a_{i,k}=-a_{i,1}, & b_{i,3}=-(\xi^0_c-\xi_i), & W_{r+i}=\dfrac{\overline{S}^2_{ij}}{2}-\dfrac{S^2_{ij}}{2}, \\
a_{i,k+1}=-a_{i,2}, & b_{i,4}=-(\eta^0_c-\eta_i), & \overline{S}^2_{i,c}=(x_c-x_i)^2+(y_c-y_i)^2, \\
a_{r+i,k}=-(x_j-x_i), & b_{r+i,1}=(x_j-x_i)^2, & S^{0^2}_{i,c}=(\xi^0_c-\xi_i)^2+(\eta^0_c-\eta_i)^2, \\
a_{r+i,k+1}=-(y_j-y_i), & b_{r+i,2}=(y_j-y_i)^2, & \overline{S}^2_{ij}=(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2, \\
a_{r+i,k+2}=-a_{r+i,k}, & & \\
a_{r+i,k+3}=-a_{r+i,k+1}, & & S^2_{ij}=(\xi_j-\xi_i)^2+(\eta_j-\eta_i)^2.
\end{array}$$

Измерванията на координатите на звездите и на десетте позиции на спътника приемаме за равнотежестни, а тежестите на координатите x_c, y_c на спътника за синхронния момент — такива, каквито са получени в резултат на изчислението им.

От решаването на уравнения (19) и (20) по метода на най-малките квадрати получаваме търсените неизвестни $\delta\xi$, $\delta\eta$ непосредствено от уравненията със съответната оценка.

За решаването на уравнения (19) и (20) по метода на най-малките квадрати въвеждаме векторите на наблюденията

$$(22)\quad \underset{1,2r-1}{S^*}=\| S_{1,c}\ \ S_{2,c}\ \ldots\ S_{r,c}\ \ S_{r+1,1}\ \ldots\ S_{r+i,k}\|,$$

$$(23)\quad \underset{1,2r-1}{\overline{S}^*}=\| \overline{S}_{1,c}\ \ \overline{S}_{2,c}\ \ldots\ \overline{S}_{r,c}\ \ \overline{S}_{r+1,1}\ \ldots\ \overline{S}_{r+i,k}\|,$$

вектора на поправките

$$(24)\quad \underset{1,2r+2}{V^*}=\| V_{x_c}\ \ V_{y_c}\ \ V_{x_1}\ \ V_{y_1}\ldots V_{x_i}\ \ V_{y_i}\ \ldots\ V_{x_{2r+2}}V_{y_{2r+2}}\|,$$

вектора на неизвестните

$$(25)\quad \underset{1,4}{X^*}=\| \mu\ \ \nu\ \ \delta\xi\ \ \delta\eta\|,$$

вектора на несъвпаденията

$$(26)\quad \underset{1,2r-1}{W^*}=\| W_1\ \ W_2\ldots W_r\ldots W_{2r-1}\|,$$

корелатите — множители на Лагранж

$$(27)\quad \underset{1,2r-1}{K^*}=\| K_1\ \ K_2\ldots K_r\ldots K_{2r-1}\|,$$

и матриците

(28)
$$\underset{2r-1,2r+2}{A^*} = $$
$$= \left\| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{22} & 0 & 0 & a_{2,5} & a_{2,6} & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i,1} & a_{i,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & a_{i,2i+1} & a_{i,2i+2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r,1} & a_{r,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & a_{r,2r+1} & a_{r,2r+2} \\ 0 & 0 & a_{r+1,3} & a_{r+1,4} & a_{r+1,5} & a_{r+1,6} & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & a_{r+i,k} & a_{r+i,k+1} & a_{r+i,k+2} & a_{r+i,k+3} \end{matrix} \right\|,$$

(29)
$$\underset{2r-1,4}{B} = \left\| \begin{matrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i,1} & b_{i,2} & b_{i,3} & b_{i,4} \\ b_{r+1,1} & b_{r+1,2} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{r+i,1} & b_{r+i,2} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

а също така и матрицата на тежестите на наблюденията

(30)
$$\underset{2r+2,2r+2}{P} = \left\| \begin{matrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & P_{2i+1} & \ldots & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & P_{2r+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & P_{2r+2} \end{matrix} \right\|.$$

В зависимост от горните обозначения записваме релацията (19) и (20) в матричен вид

(31)
$$\underset{2r-1,2r+2}{A^*}\ \underset{2r+2,1}{V} + \underset{2r-1,4}{B}\ \underset{4,1}{x} + \underset{2r-1,1}{W} = \underset{2r-1,1}{0}.$$

От (31) следват съответно следните уравнения

(32)
$$\begin{cases} \underset{2r-1,2r+2}{A^*}\ \underset{2r+2,2r+2}{P^{-1}}\ \underset{2r+2,2r-1}{A}\ \underset{2r-1,1}{K} + \underset{2r-1,4}{B}\ \underset{4,1}{x} + \underset{2r-1,1}{W} = \underset{2r-1,1}{0}, \\ \underset{4,2r-1}{B^*}\ \underset{2r-1,1}{K} = \underset{2r-1,1}{0} \end{cases}$$

и матрицата на нормалните уравнения

(33)
$$\underset{2r+3,2r+3}{N} = \left\| \begin{matrix} \underset{2r-1,2r+2}{A^*}\ \underset{2r+2,2r+2}{P^{-1}}\ \underset{2r+2,2r-1}{A} & \underset{2r-1,4}{B} \\ \underset{4,2r-1}{B^*} & \underset{4,4}{0} \end{matrix} \right\|.$$

Съобразно (31) и (33) получаваме

(34)
$$\underset{2r+3,2r+3}{N} \left\| \begin{matrix} \underset{2r-1,1}{K} \\ \underset{4,1}{x} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \underset{2r-1,1}{W} \\ \underset{4,1}{0} \end{matrix} \right\| = \underset{2r+3,1}{0},$$

откъдето следва

$$\left\| \begin{matrix} \underset{2r-1,1}{K} \\ \underset{4,1}{x} \end{matrix} \right\| = \underset{2r+3,2r+3}{N^{-1}} \left\| \begin{matrix} \underset{2r-1,1}{W} \\ \underset{4,1}{0} \end{matrix} \right\|. \tag{35}$$

За получаване на средната квадратна грешка за единица тежест използуваме формулата

$$\mu = \sqrt{\frac{V^*PV}{2r-2}}. \tag{36}$$

За сравнение са решени числени примери по предлагания метод и по метода на Тѐрнер, като за целта се определят екваториалните координати на една звезда C от пет опорни звезди. Фотоплаката е получена с камерата на Потсдамския геодезически институт, чиято дисторсия е $c = +2{,}64 \times 10^{-6}$ mm^{-2}, а фокусното разстояние 963 mm. Положението на оптическия център върху плаката е определено чрез предварително изготвен шаблон.

Таблица 1

№ пример	Получени екваториални координати на обекта C	
1	По предлагания метод Изчисление с видимите екваториални координати на звездите, коригирани за астр. рефр. и денонощна аберация; измерените координати са коригирани заради дисторсията	изчислени координати на т. C $19^h30^m14^s{,}357$; $35°13'34'',64$ получени координати на т. C от каталога за момента на наблюдението $19^h30^m14^s{,}359$; $35°13'34'',10$
2*	Изчисление с видимите екваториални координати на звездите, некоригирани за астр. рефр. и денонощна аберация; измерените координати не са коригирани заради дисторсията	изчислени координати на т. C $19^h30^m14^s{,}711$; $35°13'26'',99$ получени координати на т. C от каталога за момента на наблюдението $19^h30^m14^s{,}690$; $35°13'26'',73$
3	По метода на Тернер Изчисление с видимите екваториални координати на звездите, коригирани за астр. рефр. и денонощна аберация; измерените координати са коригирани заради дисторсията	изчислени координати на т. C $19^h30^m14^s{,}360$; $35°13'34'',68$ получени координати на т. C от каталога за момента на наблюдението $19^h30^m14^s$, 359; $35°13'34'',10$
4	Изчисление с видимите екваториални координати на звездите, некоригирани за астр. рефр. и денонощна аберация; измерените координати са коригирани заради дисторсията	изчислени координати на т. C $19^h30^m14^s$, 696; $35°13'27''$, 29 получени координати на т. C от каталога за момента на наблюдението $19^h30^m14^s$, 690; $35°13'26''$, 73

*Пример 2 е изчислен от инж. Бистра Янкова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бугославская Е. Я., Фотографическая астрометрия, Москва, 1947.
2. Латка Я., Определяне екваториалните позиции на изкуствените спътници на фотографските плаки с използуването на сферическите ъгли, Наблюдения искусственных спутников Земли, № 3, 1964.
3. Дейч А. Н., Определение фотографического положения объекта по двум и по трем опорным звездам, Астрон. журнал, XXV, вып. 1, 1948.
4. Киселев А. А., Интерполяционный метод определения положений небесного объекта на фотографии, Астрон. журнал, 36, 2, 1959, стр. 34.
5. Меллер И., Введение в спутниковую геодезию, Москва, 1967.

Получена на 25. XI. 1968 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ ПУТЕМ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ ПО ФОТОГРАФИЧЕСКИМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Н. Георгиев и Ц. Даракчиев

(Резюме)

В статье приводится метод определения экваториальных топоцентрических координат искусственных спутников Земли по двум и более звездам путем условного выравнивания по методу наименьших квадратов.

При решении проблемы поставлено условие для равенства сторон S_{ij} (18), связывающих опорные звезды, вычисленные один раз (14) по тангенциальным координатам ξ_i, η_i (полученным из экваториальных координат каталога), а второй раз — из измеренных образных координат x_i, y_i (15), имеющих все специфические для фотографических наблюдений ошибки. Для осуществления этого равенства в (15) приняты во внимание коррекционные члены.

Такие же связи созданы и между звездой-спутником.

Даны и конечные результаты вычислений, сделанных классическим методом (Тернера) и предлагаемым методом.

BESTIMMUNG DER ÄQUATORIALEN TOPOZENTRISCHEN KOORDINATEN DER KÜNSTLICHEN ERDSATELLITEN DURCH BERECHNETE ENTFERNUNGEN AUS PHOTOGRAPHISCHEN BEOBACHTUNGEN

N. Georgiev, Zw. Daraktschiev

(Zusammenfassung)

Es wird eine Methode zur Bestimmung der äquatorialen topozentrischen Koordinaten der künstlichen Erdsatelliten von zwei Sternen und von mehreren Sternen, durch bedingte Gleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate gegeben.

Bei der Lösung des Problems ist die Bedingung der Gleichheit zwischen den die Stützsterne verbindenden Seiten S_{ij} nach (18) gestellt, die einmal nach (14) durch die tangentiällen Koordinaten ξ_i, η_i (erhalten von den äquatorialen Katalogkoordinaten) mit zum zweiten von den gemessenen bildlichen Koordinaten x_i, y_i (15), (beladen mit allen für die photographischen Beobachtungen spezifischen Fehlern) berechnet sind. Für die Verwirklichung dieser Gleichheit in (15) sind alle Korrektionsglieder berücksichtigt.

Solche Verbindungen sind auch zwischen Stern-Erdsatelliten geschaffen.

Es werden auch die Endergebnisse der Berechnungen gegeben, die nach der klassischen Methode (Terner) und nach der vorgeschlagenen Methode gemacht sind.