БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА СЕКЦИЯТА ПО АСТРОНОМИЯ
BULLETIN OF THE SECTION OF ASTRONOMY
Том (Vol.) VI, 1973

ДОКАЗАТЕЛСТВО ЗА СЪЩЕСТВУВАНЕТО НА КУПОВЕ ОТ КУПОВЕ ОТ ГАЛАКТИКИ ОКОЛО СЕВЕРНИЯ ГАЛАКТИЧЕСКИ ПОЛЮС

Марин Калинков

1. УВОД

В [1] са приведени изоплетни карти, съставени от центровете на куповете от галактики, включени в каталозите на Zwicky [2]—[4] и с $0° < l^{II} \leq 360°$, $+65°,01 < b^{II}$. Изоплетните карти са конструирани с помощта на повърхностни плътности при пълзящо усредняване от по четири съседни елементарни плътности за площадки с размери 10° по l^{II} и 2° по b^{II}. Всички елементарни повърхностни плътности са редуцирани към 1□°. Прокарването на изоплетите се основава на линейна интерполация.

В разглежданата област са разположени центровете на 2146 купове от галактики, класифицирани от Zwicky в различни класове по разстояния (N=near, MD=medium distant, D=distant, VD=very distant, ED=extremely distant).

Да означим първите три класи със $\Sigma' = N + MD + D$, следващите със $\Sigma'' = VD + ED$, а всички класове със $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$. Средните повърхностни плътности $\mathfrak{D}$ (в купове на 1 □°) за контурните карти от [1] са

$$\mathfrak{D}_{\Sigma'} = 0{,}34, \quad \mathfrak{D}_{VD} = 0{,}29, \quad \mathfrak{D}_{ED} = 0{,}49, \quad \mathfrak{D}_{\Sigma} = 1{,}11.$$

Основните изоплети, означени на всички контурни карти с 1, се отнасят за средна повърхностна плътност $\mathfrak{D}$. Така например за ED изоплетата 1 съответствува на повърхностна плътност $1\mathfrak{D}_{ED} = 0{,}49$, изоплетата 2 — на $2\mathfrak{D}_{ED} = 0{,}98$ и т. н.

Списък на видимите кондензации от центровете на куповете от галактики, отговарящи на определени условия, е приведен в [1, табл. 5].

Целта на настоящата работа е определянето и ефективното използване на характеристика, свързана с куповете от галактики, която да зависи от видимата повърхностна плътност $\mathfrak{D}$. Ако конфигурациите, определени върху контурните карти, са физически свързани системи, те са в същност купове от купове от галактики, или купове от втори ред. Естествено е тогава да се предположи, че куповете от галактики, съдържащи се в куповете от втори ред, могат да се различават по някаква характеристика от тези купове от галактики, които не са включени в конфигу-

рациите. Установяването на подобна характеристика би било силно доказателство, че конфигурациите върху изоплетните карти са физически свързани системи, или по-общо, доказателство за съществуването на купове от втори ред. Обратно — отсъствието на подобна характеристика би могло да се разглежда като аргумент (но по-слаб, отколкото в горния случай) в полза на твърдението, че конфигурациите не са купове от втори ред, а са флуктуации в едно случайно поле (формирано от купове от първи ред).

Броят на характеристиките, които могат да бъдат използвани за нашата цел, е ограничен от данните за куповете от галактики, съдържащи се в каталозите на Zwicky:

1. Координатите δ_{1950} и α_{1950} са приведени с точност 1′ и $0^m,1$ съответно. Тези координати (трансформирани във втора галактическа система) са използвани при конструирането на изоплетните карти. Следователно информацията, съдържаща се в координатите, е вече извлечена (но групово, тъй като са определяни площни повърхностни плътности; индивидуално извличане на информацията ще бъде направено в следваща работа, но без възможност за построяване на изоплетни карти).

2. Куповете от галактики са разделени на три групи — compact (c), medium compact (mc), open (o). Ако тази характеристика се възприеме за основна, предварително може да се очаква, че куповете от първи ред, принадлежащи към купове от втори ред, няма да се отличават съществено от куповете, формиращи фона.

3. Най-важната характеристика, върху която са базирани резултатите от настоящата работа, е населеността. Населеност $\mathfrak{N}$ на един куп е броят на галактиките, действително регистрирани в границите на купа, както са означени върху картите от каталозите на Zwicky, минус определения брой фонови галактики в същата област. Работното определение на Zwicky за куп (богат) от галактики е да съдържа поне 50 галактики в диапазона от m_{max} до m_{max+3}, където m_{max} е видимата фотографическа величина на най-ярката галактика в купа. Но за ED-куповете може да се случи граничната звездна величина на плаката да попадне в интервала $m_{max}-m_{max+3}$, така че не всички галактики в този интервал могат да бъдат регистрирани. Ето защо някои купове, за които в действителност са преброени по-малко от 50 члена, но за които Zwicky по една или друга причина счита, че населеността би превишила 50 галактики в интервала $m_{max}-m_{max+3}$, са включени в каталозите.

4. Диаметърът на един куп се определя като диаметър на кръг, покриващ приблизително същата област, както и купа върху оригиналните Паломарски плаки. Би могло да се очаква, че ако конфигурациите са купове от втори ред, съществува връзка между диаметрите на фоновите купове от първи ред и диаметрите на куповете, формиращи конфигурациите. Но подобна връзка при еднократна проверка за съществуване не беше установена, което позволява да се твърди, че корелацията между диаметрите на куповете от галактики, принадлежащи към двете съвкупности, е слаба.

5. Последната характеристика, приведена в каталозите на Zwicky, е разстоянието, използвано при конструирането на изоплетните карти.

Към тези характеристики на Zwicky може да бъде прибавена още една, вторична; средна повърхностна плътност на даден куп от галак-

тики е величината $\mathfrak{N}/S$, където S е площта на купа, определена от диаметъра. Тъй като обработката ни в този случай дава основание уверено да се твърди, че не съществува значима корелация между средните повърхностни плътности на куповете от галактики, принадлежащи към двете съвкупности, тези данни изобщо няма да бъдат разглеждани.

2. НАБЛЮДАТЕЛЕН МАТЕРИАЛ

Тъй като изоплетните карти от [1] са конструирани в полярна координатна система, естествено, както се вижда и от фигурите, грешките при провеждане на изоплетите се увеличават с $b^{\mathrm{II}} \to +90°$. Ето защо е необходимо изключването на тези купове от галактики, разположени в съседство със Северния галактически полюс. Всички резултати от настоящата работа се отнасят за областта от небесната сфера, определена от

$$0° < l^{\mathrm{II}} \leqq 360°, \qquad (1)$$
$$+65°,01 \leqq b^{\mathrm{II}} \leqq +85°,00.$$

За всички купове от галактики, центровете на които са разположени вътре в областта (1), са определени изоплетните интервали, в които са локализирани техните центрове.

Нека предположим, че: а) изоплетните карти от [1] показват съществуването на купове от втори ред и б) изоплетите 2 определят контурите на свръхкуповете.

Ако предположение а) е оправдано, то б) е твърде силно изискване, тъй като повърхностната плътност на куповете от галактики в свръхкуповете могат и да не се отличават съществено от фоновата плътност.

Да означим населеностите на куповете, чиито центрове са разположени в област с повърхностна плътност поне $2\mathfrak{D}$, с $\mathfrak{N}_s$, а в област с плътност под $2\mathfrak{D}$—с $\mathfrak{N}_n$. Ако разпределенията на случайните величини $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$ не се отличават значимо, двете извадки принадлежат към една и съща генерална съвкупност и тогава конфигурационните образувания върху изоплетните карти представляват флуктуации. В противния случай двете извадки не принадлежат към една и съща генерална съвкупност, конфигурациите върху изоплетните карти нямат флуктуационен произход и представляват купове от втори ред.

Така нашата нулева хипотеза H_0 се състои в това, че двете извадки принадлежат към една и съща генерална съвкупност.

За да бъде проверена нулевата хипотеза H_0, в настоящата работа са използвани както непараметрически, така и параметрически методи. Задачата се усложнява от това, че разпределенията на случайните величини не са нормални и трудно могат да бъдат преобразувани в нормални.

Доколкото поради неголямата статистика за куповете от класове N, MD и D е построена обща изоплетна карта, коректно е разглеждането на разпределенията на случайните величини $\mathfrak{N}_{s,\Sigma}$ и $\mathfrak{N}_{n,\Sigma}$. Заедно с тях обаче ние ще разгледаме и разпределенията на $\mathfrak{N}_{s,\mathrm{N}}$, $\mathfrak{N}_{n,\mathrm{N}}$, $\mathfrak{N}_{s,\mathrm{MD}}$, $\mathfrak{N}_{n,\mathrm{MD}}$, $\mathfrak{N}_{s,\mathrm{D}}$, $\mathfrak{N}_{n,\mathrm{D}}$ при предположението, че изоплетите от фиг. 1 [1] се

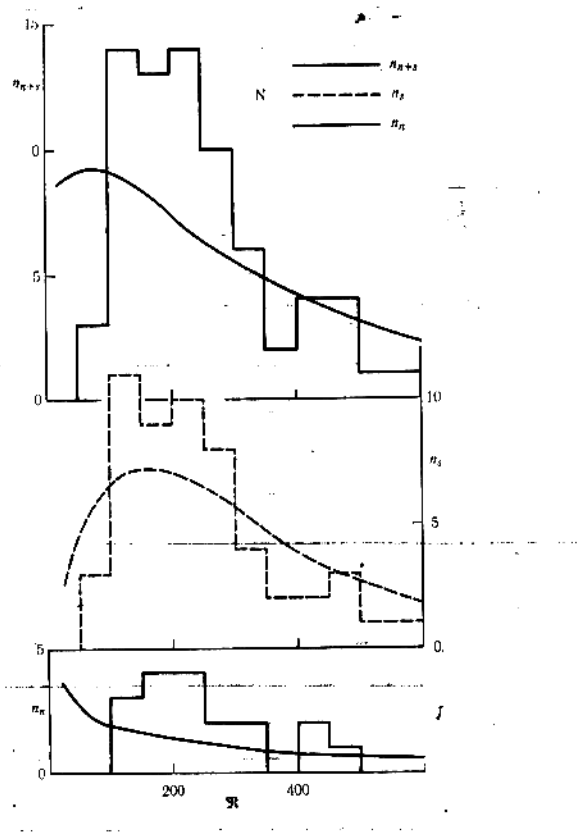
Таблица 1

$\Delta\mathfrak{N}$	N			MD			D			VD			ED			Σ'			Σ''			Σ		
	n_s	n_n	n_{s+n}	n_s	n_n	n_{s+n}	n_s	n_n	n_{s+n}	n_s	n_n	n_{s+n}	n_s	n_n	n_{s+n}	n_s	n_n	n_{s+n}	n_s	n_n	n_{s+n}	n_s	n_n	n_{s+n}
31— 40								1	1		1	1	2	14	16		1	1	2	15	17	2	16	18
41— 50								1	1		7	7	6	47	53		1	1	6	54	60	6	55	61
51— 60								3	3	5	31	36	28	99	127		3	3	33	130	163	33	133	166
61— 70		1	1	1		1		4	4	6	38	44	34	94	128	1	5	6	40	132	172	41	137	178
71— 80					1	1	2	11	13	11	37	48	43	74	117	2	12	14	54	111	165	56	123	179
81— 90				1	2	3	1	15	16	15	39	54	37	69	106	2	17	19	52	108	160	54	125	179
91— 100		2	2	2	7	9	8	25	33	18	54	72	45	53	98	10	34	44	63	107	170	73	141	214
101— 110		1	1	1	17	18	6	38	44	11	34	45	31	43	74	7	56	63	42	77	119	49	133	182
111— 120		2	2	2	19	21	4	26	30	14	30	44	29	25	54	6	47	53	43	55	98	49	102	151
121— 130	1	4	5	2	15	17	8	21	29	4	22	26	12	20	32	11	40	51	16	42	58	27	82	109
131— 140	2	2	4		10	10	7	20	27	8	23	31	13	14	27	9	32	41	21	37	58	30	69	99
141— 150		2	2		8	8	7	16	23	5	13	18	9	9	18	7	26	33	14	22	36	21	48	69
151— 160	1	1	2	3	3	6	8	6	14	6	11	17	4	8	12	12	10	22	10	19	29	22	29	51
161— 170	1	2	3	3	7	10	6	7	13	7	8	15	5	2	7	10	16	26	12	10	22	22	26	48
171— 180	1	3	4	2	9	11	1	5	6	9	9	18	2	6	8	4	17	21	11	15	26	15	32	47
181— 190		1	1	3	4	7	4	7	11	1	7	8	3	4	7	7	12	19	4	11	15	11	23	34
191— 200	1	2	3	3	4	7	2	4	6	3	4	7	2	1	3	6	10	16	5	5	10	11	15	26
201— 210	2	6	8	3	7	10	4	3	7	2	3	5		5	5	9	16	25	2	8	10	11	24	35
211— 220	1	1	2		1	1		4	4	1	5	6	3	2	5	1	6	7	4	7	11	5	13	18
221— 230				1	5	6	4	3	7	1	1	2		2	2	5	8	13	1	3	4	6	11	17
231— 240		2	2	2	5	7	2	3	5	3	5	8	2		2	4	10	14	5	5	10	9	15	24
241— 250	1	1	2		4	4	2	2	4	1		1	1		1	3	7	10	2		2	5	7	12
251— 260	1	1	2	1	3	4	1	2	3	3		3				3	6	9	3		3	6	6	12
261— 270				1	1	1		3	3		1	1	1		1	1	4	5	1	1	2	2	5	7
271— 280		2	2	2	1	3	1	3	4	1	2	3	3		3	3	6	9	4	2	6	7	8	15
281— 290	1	1	2	1		1		3	3		1	1				2	4	6		1	1	2	5	7
291— 300		4	4		2	2	3	1	4	2		2	1		1	3	7	10	3		3	6	7	13
301— 310		2	2	2	4	6		1	1				1		1	2	7	9				2	7	9
311— 320		2	2					2	2				1		1		4	4	1		1	1	4	5
321— 330	1		1	1	1	2		1	1							2	2	4	1		1	3	2	5
331— 340					1	1		1	1								2	2					2	2

341— 350	1		1	1	1	2	1	1	2	2		2					3	2	5	2		2	5	2	7
351— 360		1	1	1	2	3	1		1								2	3	5				2	3	5
361— 370				1	1	2	1		1								2	1	3				2	1	3
371— 380		1	1		1	1		1	1									3	3					3	3
381— 390				1	1	2											1	1	2				1	1	2
391— 400				1		1											1		1				1		1
401— 410				1	1	2		1	1	1		1		1		1	1	2	3	1	1	2	2	3	5
411— 420	1	1	2							1	1	2					1	1	2	1	1	2	2	2	4
421— 430								1	1		1	1						1	1		1	1		2	2
431— 440				2		2											2		2				2		2
441— 450	1	1	2		1	1											1	2	3				1	2	3
451— 460	1		1		1	1											1	1	2				1	1	2
461— 470		2	2		1	1												3	3					3	3
471— 480		1	1	1		1		1	1								1	2	3				1	2	3
481— 490					1	1	1		1	1		1					1	1	2	1		1	2	1	3
491— 500																									
501— 550		1	1	1		1		3	3								1	4	5				1	4	5
551— 600		1	1	1	2	3	1	1	2				1		1		2	4	6	1		1	3	4	7
601— 650		1	1					1	1									2	2					2	2
651— 700		3	3		2	2	1		1								1	5	6				1	5	6
701— 750		1	1															1	1					1	1
751— 800		1	1		1	1												2	2					2	2
801— 850		1	1															1	1					1	1
851— 900					1	1												1	1					1	2
901— 950	1	1	2	1		1											2	1	3				2	1	3
1001—1100		1	1															1	1					1	1
1401—1500								1	1									1	1					1	1
1801—1900	2		2														2		2				2		2

отнасят поотделно и за трите класи N, MD, D. Това означава, че изкуствено се увеличава вероятността за приемане на нулевата хипотеза H_0.

Емпиричните разпределения са приведени в табл. 1. $\mathfrak{N}$, населеността на куповете от галактики, е 31 (10) 501 (50) 1001 (100) 1900. n_s и n_n са

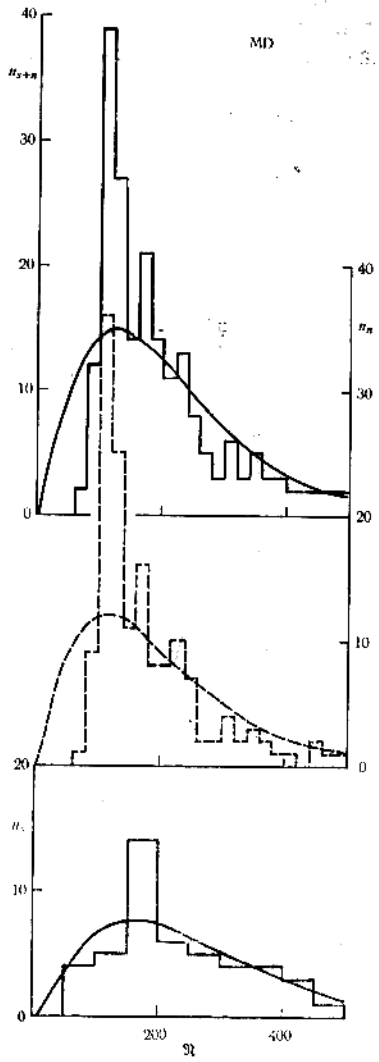


Фиг. 1

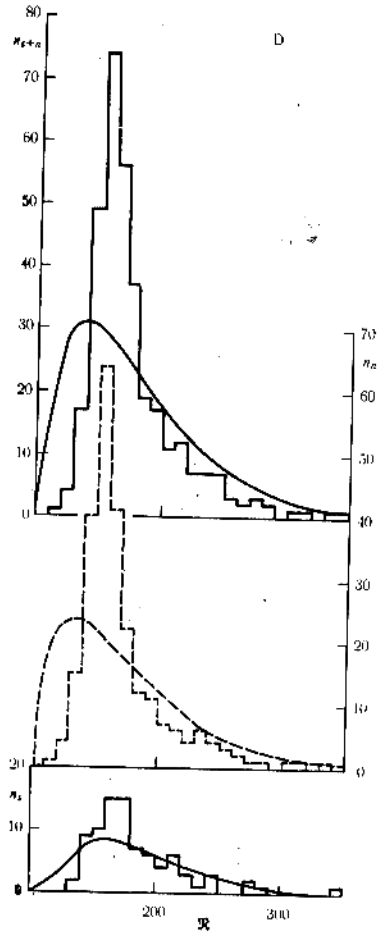
Таблица 2

	$\sum' n_s$	$\sum' n_n$	$\sum' n_{s+n}$
N	21	63	84
MD	49	158	207
D	87	253	340
VD	142	388	530
ED	319	592	911
Σ'	157	474	631
Σ''	461	980	1441
Σ	618	1454	2072

броят купове от галактики (случаи) (индекс s е за населености на галактики при повърхностни плътности на картите най-малко $2\mathfrak{D}$, индекс n — при повърхностни плътности под $2\mathfrak{D}$), а n_{s+n} са случаите за даден клас по разстояние.



Фиг. 2



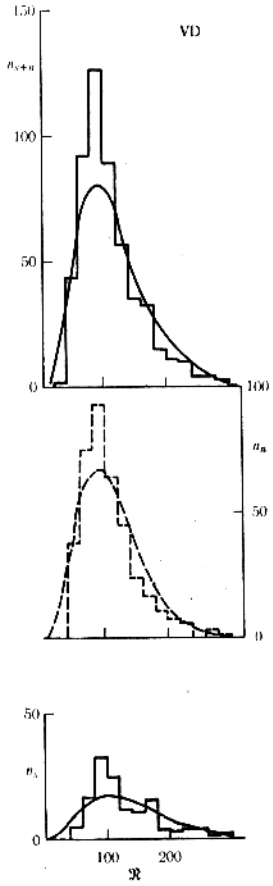
Фиг. 3

Броят на всички обекти по разстояния от двете извадки, както и тяхната сума, е представен в табл. 2.

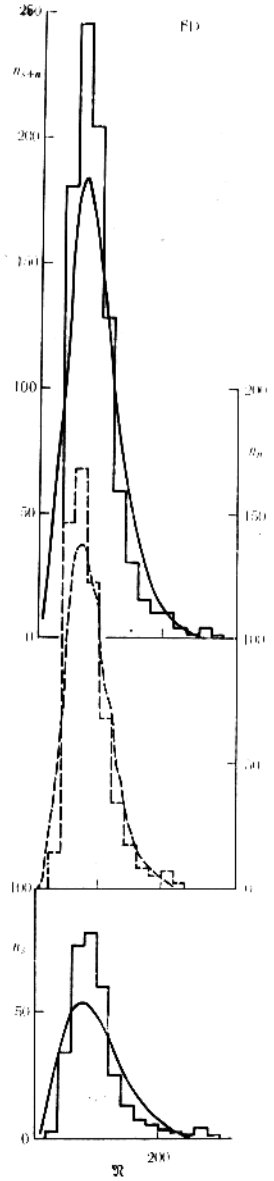
Наблюдаваните разпределения са представени на фиг. 1 (N), фиг. 2 (MD), фиг. 3 (D), фиг. 4 (VD), фиг. 5 (ED), фиг. 6—8 (Σ', Σ'', Σ) заедно със съответните Γ-разпределения (вж. т. 9).

3. МЕТОД НА МЕДИАНИТЕ

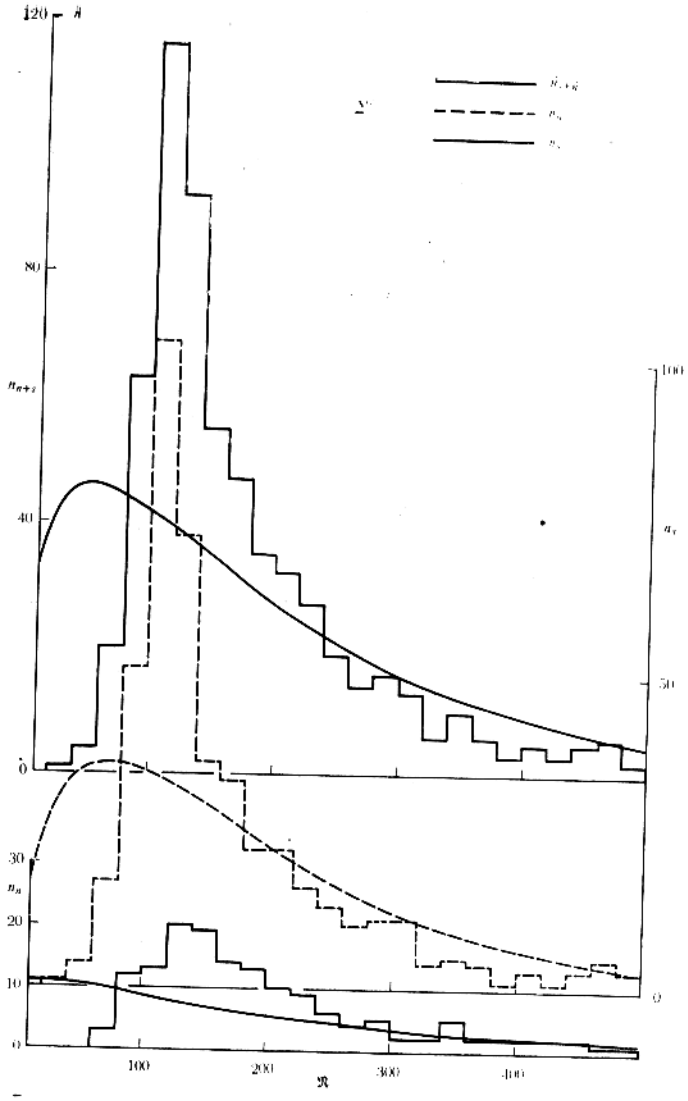
Нека елементите $x_1, x_2, \ldots, x_m$ на една извадка с обем m, извлечена от генерална съвкупност с непрекъсната функция на разпределение, са разположени по възходящ ред $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(m)}$, където $x_{(i)}$ е статистика от ред i. Тогава могат да бъдат построени двустранни непараметрични доверителни интервали за медианата на генералната съвкуп-



Фиг. 4

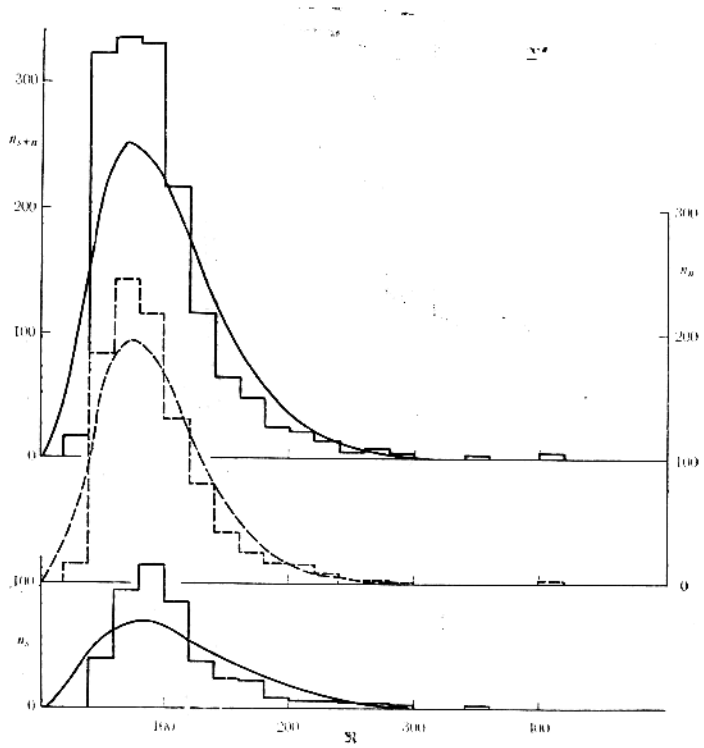


Фиг. 5

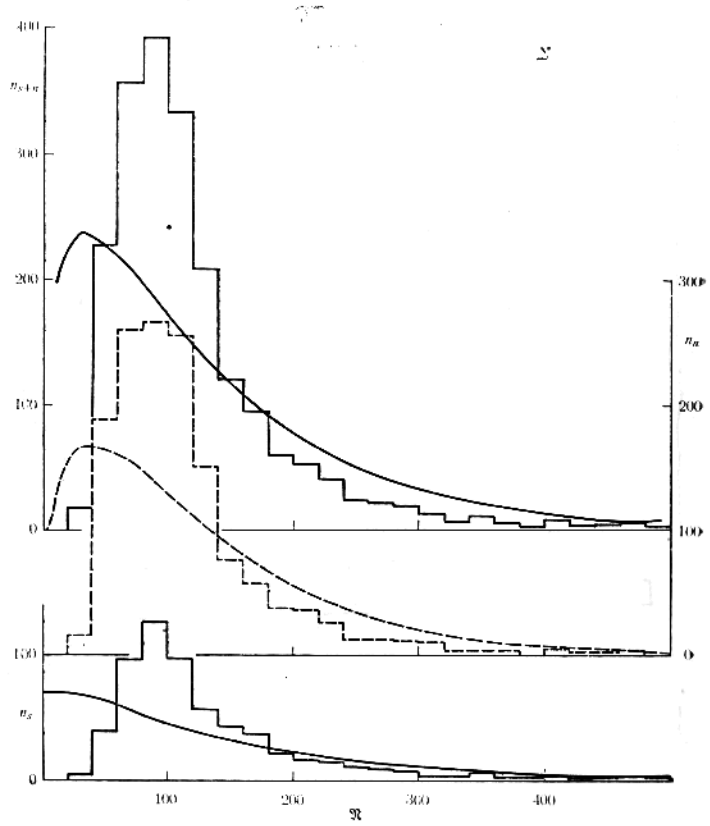


Фиг. 6

ност (вж. [5], [6], [7], където са приведени необходимите таблици; съвременната теория на този въпрос е изложена в [8]). Доверителните интервали се дават с помощта на величините A, които позволяват с увереност $(1-2Q)\,100\,\%$ да се твърди, че медианата на генералната съвкупност е заключена между статистиките $x_{(A)}$ и $x_{(m-A+1)}$. Аналогичен метод е използван в нашата работа [9], където са приведени и необходимите формули. Ако имаме втора извадка $y_{(1)}, y_{(2)}, \ldots, y_{(l)}$, покриването на двата доверителни интервала $[x_{(A)}, x_{(A-m+1)}]$ и $[y_{(A)}, y_{(A-l+1)}]$ би означавало приемането на нулевата хипотеза H_0.

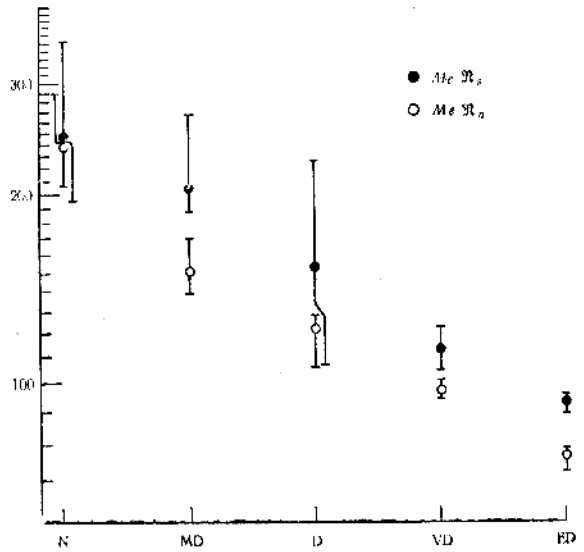


Фиг. 7



Фиг. 8

Да приложим този метод за порядковите статистики $Me\mathfrak{N}_s$ и $Me\mathfrak{N}_n$ при различни класове по разстояния. В табл. 3 са дадени стойностите на Q, $i(Me)$ за $\mathfrak{N}_s$, $k(Me)$ за $\mathfrak{N}_n$, Me в галактики, доверителните интервали по i $(A,\ A-n_s+1)$ за $\mathfrak{N}_s$, доверителните интервали по k $(A,\ A-n_n+1)$ за $\mathfrak{N}_n$, както и



Фиг. 9

населеностите $[\mathfrak{N}_{s(A)},\ \mathfrak{N}_{s(A-n_s+1)}]$ и $[\mathfrak{N}_{n(A)},\ \mathfrak{N}_{n(A-n_n+1)}]$ (галактики) за доверителните интервали.

Както се вижда от табл. 3, за куповете N двустранните непараметрични доверителни интервали на $Me(\mathfrak{N}_n)$ попадат вътре в съответните интервали на $Me(\mathfrak{N}_s)$ при всички разглеждани Q. За куповете MD двата доверителни интервала съществено се отличават при $Q=0{,}10$, а при другите стойности на Q има частично покриване (незначително при $Q=0{,}025$). Частично покриване има и при куповете D за $Q=0{,}005$ и 0,01, а за останалите три стойности на Q двата доверителни интервала се отличават. Съществено отличие има при куповете ED при всички Q, частично покриване на куповете Σ' и пълно отличие за всички Q при куповете Σ''.

Интересно е да се отбележи, че връзката между $Me(\mathfrak{N}_s)$ и класа (разстоянието) на куповете е линейна в полулогаритмичната равнина, а при $Me(\mathfrak{N}_n)$ изключение е стойността на медианата $Me(\mathfrak{N}_{n,N})$. Тази връзка е означена на фиг. 9 заедно с двустранните непараметрични доверителни интервали за $Q=0{,}10$ (увереност 80 %).

Приложеният тук метод не притежава висока ефективност, тъй като се основава само върху предположението за непрекъснатост на функцията на разпределение и се работи само с една порядкова статистика. При проверка на нулевата хипотеза с помощта на квантили ефективността се увеличава.

Таблица 3

Купове	Показател	За Q 0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	*Me*	*Me*, галактики
N	$\mathfrak{N}_s$ $(A, A-n_s+1)$ $\mathfrak{N}_s(A)-\mathfrak{N}_s(A-n_s+1)$	(4, 18) 159—455	(4, 18) 159—455	(5, 17) 166—449	(6, 16) 173—411	(7, 15) 195—350	$i=11$	247
	$\mathfrak{N}_n$ $(A, A-n_n+1)$ $\mathfrak{N}_n(A)-\mathfrak{N}_n(A-n_n+1)$	(21, 43) 188—310	(22, 42) 192—310	(23, 41) 199—297	(24, 40) 203—296	(26, 38) 207—293	$k=32$	240
MD	$\mathfrak{N}_s$ $(A, A-n_s+1)$ $\mathfrak{N}_s(A)-\mathfrak{N}_s(A-n_s+1)$	(15, 35) 164—305	(15, 35) 164—305	(17, 33) 173—278	(18, 32) 181—272	(19, 31) 188—267	$i=25$	205
	$\mathfrak{N}_n$ $(A, A-n_n+1)$ $\mathfrak{N}_n(A)-\mathfrak{N}_n(A-n_n+1)$	(62, 97) 132—178	(63, 96) 132—178	(66, 93) 135—174	(68, 91) 137—191	(70, 89) 139—170	$k=79{,}5$	151
D	$\mathfrak{N}_s$ $(A, A-n_s+1)$ $\mathfrak{N}_s(A)-\mathfrak{N}_s(A-n_s+1)$	(13, 75) 103—243	(13, 75) 103—243	(15, 73) 105—233	(16, 72) 106—229	(17, 71) 106—226	$i=44$	153
	$\mathfrak{N}_n$ $(A, A-n_n+1)$ $\mathfrak{N}_n(A)-\mathfrak{N}_n(A-n_n+1)$	(105, 143) 113—132	(107, 147) 114—132	(110, 144) 114—130	(113, 141) 116—129	(116, 138) 118—128	$k=127$	122
VD	$\mathfrak{N}_s$ $(A, A-n_s+1)$ $\mathfrak{N}_s(A)-\mathfrak{N}_s(A-n_s+1)$	(55, 88) 100—134	(56, 87) 101—132	(58, 85) 103—131	(60, 83) 104—126	(62, 81) 105—122	$i=71{,}5$	113
	$\mathfrak{N}_n$ $(A, A-n_n+1)$ $\mathfrak{N}_n(A)-\mathfrak{N}_n(A-n_n+1)$	(168, 221) 93—104	(170—219) 93—103	(174, 215) 94—102	(177, 212) 94—101	(181, 208) 94—101	$k=194{,}5$	97
ED	$\mathfrak{N}_s$ $(A, A-n_s+1)$ $\mathfrak{N}_s(A)-\mathfrak{N}_s(A-n_s+1)$	(136, 184) 86— 97	(138, 182) 86— 97	(141, 174) 86—96	(144, 176) 87— 96	(148, 172) 89— 95	$i=160$	93
	$\mathfrak{N}_n$ $(A, A-n_n+1)$ $\mathfrak{N}_n(A)-\mathfrak{N}_n(A-n_n+1)$	(263, 330) 71— 80	(267, 326) 71— 79	(271, 322) 71—79	(275, 318) 72—79	(279, 314) 72— 78	$k=296{,}5$	76
Σ'	$\mathfrak{N}_s$ $(A, A-n_s+1)$ $\mathfrak{N}_s(A)-\mathfrak{N}_s(A-n_s+1)$	(28, 130) 119—307	(29, 129) 122—305	(30, 128) 124—297	(32, 126) 125—292	(33, 125) 125—290	$i=79$	173
	$\mathfrak{N}_n$ $(A, A-n_n+1)$ $\mathfrak{N}_n(A)-\mathfrak{N}_n(A-n_n+1)$	(208, 267) 129—148	(211, 264) 129—148	(215, 260) 130—147	(216, 215) 130—147	(220, 255) 132—145	$k=237{,}5$	137
Σ''	$\mathfrak{N}_s$ $(A, A-n_s+1)$ $\mathfrak{N}_s(A)-\mathfrak{N}_s(A-n_s+1)$	(201, 261) 92—103	(204, 258) 93—102	(208, 254) 93—101	(211, 251) 94—100	(215, 247) 95— 99	$i=231$	97
	$\mathfrak{N}_n$ $(A, A-n_n+1)$ $\mathfrak{N}_n(A)-\mathfrak{N}_n(A-n_n+1)$	(448, 533) 80—88	(452, 529) 80—87	(458, 523) 81—87	(463, 518) 81—87	(469, 512) 82— 86	$k=490{,}5$	84

(Функцията на разпределение в нашия случай не е непрекъсната, а е дискретна. Но тъй като стохастическата теория за разпределението на галактиките в пространството се основава върху предположение за непрекъснатост [10], тук този въпрос няма да бъде разглеждан. Що се отнася до корелационните функции, дискусията за непрекъснатост е изложена в [11]—[13], а също и [14] по повод резултатите на Limber [15], [16] и Rubin [17]).

Изводът е: При куповете ED и Σ'' се приема алтернативната хипотеза, при N, D и Σ' се приема нулевата хипотеза при всички Q, а при MD и VD се приема алтернативната хипотеза с увереност респективно 80 и 95 %.

4. χ^2-КРИТЕРИЙ

Тук ще бъдат сравнени емпиричните разпределения на случайните величини $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$. Нулевата хипотеза ще бъде приета, ако се установи, че двете извадки принадлежат към една и съща генерална съвкупност.

За формулировката на поставената задача вж. [18].

Дадени са две извадки с неизвестни хипотетични групови вероятности. Нека $\pi_{s1}, \pi_{s2}, \ldots, \pi_{sk}$ и $\pi_{n1}, \pi_{n2}, \ldots, \pi_{nk}$ са вероятностите на изходите в двете съвкупности. Тогава

$$H_0:\ \pi_{si}=\pi_{ni},\quad i=1,\ 2,\ldots,\ k. \tag{2}$$

Оценките на вероятностите са

$$\hat{\pi}_{si}=n_{si}/n_{s.}\ ,\quad \hat{\pi}_{ni}=n_{ni}/n_{n.}\ ,$$

където $n_{s.}=n_{s1}+\ldots+n_{sk}$ и $n_{n.}=n_{n1}+\ldots+n_{nk}$. Ако означим $n_{.i}=n_{ni}+n_{si}$, $n_{..}=n_{n.}+n_{s.}$, $p_i=n_{ni}/n_{.i}$ и $p=n_{n.}/n_{n..}$, статистиката χ^2 се определя от

$$\chi^2=\sum\frac{\left(n_{ni}-\frac{n_{n.}n_{.i}}{n_{..}}\right)^2}{\frac{n_{n.}n_{.i}}{n_{..}}}+\sum\frac{\left(n_{si}-\frac{n_{s.}n_{.i}}{n_{..}}\right)^2}{\frac{n_{s.}n_{.i}}{n_{..}}}$$

$$=\frac{1}{p(1-p)}\Sigma n_{.i}(p_i-p)^2=\frac{1}{p(1-p)}(\Sigma n_{.i}p_i^2-n_{..}p^2),$$

или окончателно

$$\chi^2=\frac{1}{p(1-p)}(n_{ni}p_i-n_{n.}p) \tag{3}$$

с $\nu=k-1$ степени на свобода. От изчислителна гледна точка (3) е по-удобна от обикновено прилаганата формула (например от (7.3.12) в [19]).

Както е известно, χ^2 е повлиян от начина на групиране и числеността в групите [18], [20], [21]. Съгласно [22] числеността в отделните групирания може да достигне до 2—3 единици. За да се оценят поне приблизително ефектите от групиране и численост, сравняването на разпределенията на случайните величини $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$ тук е провеждано за различни групирания и числености. Стойностите на χ^2 са анализирани с по-

мощта на подробните таблици [6] за Q-процентовите точки на разпределението χ^2 (до $Q=0{,}05$), като освен това е пресмятан и интегралът на вероятностите на χ^2. При $\nu=1$ степен на свобода са използвани таблиците [23]. При големи ν е провеждана апроксимация Wilson — Hilferty [24], използвайки факта, че

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{\nu}}+\frac{2}{9\nu}-1\right)\sqrt{\frac{9\nu}{2}} \tag{4}$$

е разпределена приблизително нормално **N** (0, 1) и могат да се използват например таблиците [25]. В някои случаи е използвана и релацията с разпределението на Поасон

$$1-P(\chi^2,\nu)=\sum_{m=0}^{\frac{\nu}{2}-1}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \tag{5}$$

където параметърът $\lambda=\chi^2/2$. Интегралът на вероятностите на χ^2 е приведен навсякъде с три значещи цифри след деветките или нулите. Окончателните резултати са дадени в табл. 4, включваща класовете по разстояния, получения при сравняване на емпиричните разпределения χ^2 по (3) с ν степени на свобода, интеграла на вероятностите $P(\chi^2)$ и min n — най-малката численост в групировките.

Нека отбележим, че при $\nu=1$ проверката на нулевата хипотеза се свежда до анализ на таблица на спрегнатите признаци 2×2 [18], [21], [26], [27]. В този случай статистиката χ^2 измерва сумарното различие между честотите. От χ^2 могат да се отделят две компоненти (χ_1^2 и χ_2^2), които измерват различията между маргиналните честоти, и трета компонента (χ_3^2) за проверка на отклоненията от независимост. Но тъй като тук хипотетичните маргинални вероятности не са известни, имаме $\chi_1^2=\chi_2^2=0$ и $\chi_3^2=\chi^2$ е мярка за отклонението от независимост.

Най-малката наблюдавана честота при $\nu=1$ степен на свобода е за куповете N. Тъй като при малки извадки χ^2-апроксимацията може да се окаже несъстоятелна, използвана е корекцията на Yates [28] и предложението на Дандекар (изложено в [18]), които незначително подобряват апроксимацията.

При куповете N даже и да се изключи χ^2 за $\nu=6$ (тъй като наблюдаваните честоти в три групировки са 2) трябва да се приеме нулевата хипотеза.

При куповете MD χ^2 превишава $Q=0{,}1\,\%$ за $\nu=3$. Нулевата хипотеза се отхвърля с вероятност $P>0{,}999$. Даже и при $\nu=1$ нулевата хипотеза трябва да се отхвърли с вероятност $P>0{,}99$.

За куповете D нулевата хипотеза също така се отхвърля с вероятност $P>0{,}99$ (при $\nu=3$ с $P>0{,}999$).

По-висока е вероятността за куповете VD при $\nu=10$ ($P>0{,}9999$), а при всички ν нулевата хипотеза се отхвърля с $P>0{,}99$.

Значително по-висока е вероятността при куповете ED. Всички стойности на χ^2 надвишават $\chi^2(\nu,\ 0{,}05\,\%)$. Най-ниската вероятност, с която се отхвърля нулевата хипотеза, е при $\nu=1$ ($P>0{,}99999$), а най-високата — при $\nu=2$ ($P>0{,}99999\ 9999$).

Таблица 4

Купове	χ^2	ν	$P(\chi^2)$	min n
N	0,213	6	0,99981 4	2
	0,089	2	0,9565	6
	0,069	1	0,793	8
MD	22,367	8	0,00428	3
	17,278	3	0,00052 0	9
	9,728	1	0,00182	20
D	27,345	16	0,0379	2
	19,855	7	0,00592	6
	17,390	3	0,00049 4	15
	7,209	1	0,00725	36
VD	43,962	16	0,00020 0	4
	34,842	14	0,00156	5
	35,754	10	0,00009 28	6
	24,723	6	0,00038 4	11
	22,986	5	0,00040 5	17
	22,367	4	0,00016 9	22
	20,624	4	0,00037 6	22
	10,426	1	0,00125	66
ED	56,681	14	0,00000 0444	5
	56,213	12	0,00000 00904	8
	45,920	7	0,00000 0108	10
	45,894	6	0,00000 00328	11
	49,563	6	0,00000 00057 5	22
	44,617	4	0,00000 00047 8	23
	43,974	3	0,00000 00004 62	52

	χ^2	ν	$P(\chi^2)$	min n
ED	35,191	3	0,00000 00957	23
	44,289	2	0,00000 00002 41	70
	22,217	1	0,00000 244	124
Σ'	35,827	21	0,0230	2
	28,139	13	0,00868	6
	29,397	10	0,00107	10
	25,482	5	0,00013 4	20
	22,462	2	0,00001 32	48
	11,832	1	0,00058 2	76
Σ''	74,262	16	0,00000 00035 9	7
	54,117	9	0,00000 00169	36
	30,373	1	0,00000 00356	187
Σ	55,481	29	0,00220	5
	52,950	23	0,00045 9	8
	50,388	20	0,00019 5	12
	41,704	13	0,00009 12	25
	38,390	11	0,00008 35	21
	36,933	7	0,00000 586	33
	34,760	7	0,00001 51	51
	27,106	5	0,00006 48	52
	22,875	3	0,00003 65	118
	21,785	2	0,00001 86	155
	12,904	1	0,00032 8	

При обединените извадки имаме следното. За куповете Σ' нулевата хипотеза се отхвърля за всички ν при $Q=1\,\%$, но при $\nu=2$ вероятността за отхвърляне е $P>0{,}9999$ — веднага трябва да се отбележи, че подобна вероятност не се получава при извадките за N, MD и D (това е лесно обяснимо, тъй като конструираната изоплетна карта се отнася за Σ'). При куповете Σ'' всички χ^2 надхвърлят $\chi^2(\nu,\ 0{,}05\,\%)$. Нулевата хипотеза се отхвърля с вероятност $P>0{,}99999\,99$ (а при $\nu=16$ с вероятност $P>0{,}99999\,999$).

За всички изследвани купове Σ се получават по-големи χ^2 от $\chi^2(\nu,\ 0{,}05\,\%)$ с изключение на $\nu=29$ ($\min n=5$). За $\nu=7$ при различни групирания се получава $P_1>0{,}9999$ и $P_2>0{,}99999$.

Тъй като χ^2-апроксимацията не е добра при $\min n$ от 2 до 5 и понеже съществува различие между емпиричните разпределения на всички $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$ (без клас N), може a priori да се предположи, че за даден клас по разстояние $P(\chi^2)$ е U-образна функция на ν:

$\max P(\chi^2)$ при $\max \nu$ (до $\min n$ между 2 и 5);

$\min P(\chi^2)$ при промеждутъчни стойности на ν (и на $\min n$);

$\max P(\chi^2)$ при $\min \nu=1$ (или $\max n$).

И наистина, ходът на $P(\chi^2)$ за класове MD, D, ED, Σ', Σ'' (χ^2 при $\min n$ не е приведен в таблицата) и Σ е такъв. Изключение имаме само при VD (за $\nu=16$, $\min n=4$), което показва, че χ^2-апроксимацията в този случай е добра.

Големите различия между $P(\chi^2)$ за дадени класове по разстояния се дължат най-вече на факта, че средните стойности на случайните величини $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$ се различават и следователно $\min P(\chi^2)$ ще отговаря на тази групировка, която най-добре отразява разстоянието между средните.

Изводите са:

1. За N купове от галактики се възприема нулевата хипотеза.
2. За всички останали класове и техни обединения нулевата хипотеза се отхвърля с вероятност поне $P\approx 0{,}99$.
3. Вероятността, с която се приема алтернативната хипотеза, зависи от разстоянието до куповете.

Следователно куповете от втори ред са твърде добре локализирани пространствено, като при това нашето първоначално предположение, че съществува характеристика, която е функция на видимата повърхностна плътност $\mathfrak{D}$, се оправдава.

5. КРИТЕРИЙ НА СМИРНОВ

Както е известно, емпиричната функция на разпределение (интегрална) на извадка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с обем n от генерална съвкупност с функция на разпределение $F(x)$ се определя по следния начин:

$$F_n(x)=\begin{cases} 0 \text{ за } x<x_{(1)}; \\ \dfrac{k}{n} \text{ за } x_{(k)}\leqq x<x_{(k+1)}; \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1; \\ 1 \text{ за } x\geqq x_{(n)}. \end{cases}$$

Ако $F(x)$ е непрекъсната, съгласно Колмогоров (например [6], [21], [22])

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sqrt{n}\sup_x |F_n(x)-F(x)|<y\}=K(y),$$

където $K(y)$ е функцията на разпределение на Колмогоров.

Ако $F_n(x)$ и $F_m(x)$ са емпиричните функции на разпределение на две случайни извадки от една и съща генерална съвкупност с непрекъсната функция на разпределение, съгласно Смирнов (например [6], [21])

$$\lim_{n,m\to\infty} P\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\sup_x |F_n(x)-F_m(x)|\leq y\right\}=\begin{cases}K(y) \text{ за } y>0,\\ 0 \text{ за } y\leqq 0.\end{cases} \tag{6}$$

Таблица 5

Купове	$\max D_{(i),(k)}$	(i)	(k)	$y=\max D_{(i),(k)}\sqrt{\frac{n_{s.}n_{n.}}{n_{..}}}$	$K(y)$
N	0,142857	9	0	0,566946	0,0927
MD	0,322656	80	9	1,973246	0,99917 0
D	0,272455	130	21	2,192175	0,99986 6
VD	0,183570	339	98	1,871646	0,99819
ED	0,215189	274	79	3,098254	0,99999 99908 1
Σ'	0,238289	279	55	2,587786	0,99999 695
Σ''	0,173140	361	90	3,065695	0,99999 99863
Σ	0,108597	372	91	2,261515	0,99992 78

В табл. 5 са дадени резултатите от проверката на нулевата хипотеза H_0 с помощта на критерия на Смирнов. $\max D_{(i),(k)}$ е максималната абсолютна разлика между двете емпирични функции на разпределение на $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$, i и k са съответните поредни номера на елементите от двете извадки (i за $\mathfrak{N}_n$, k за $\mathfrak{N}_s$), а $K(y)$ е функцията на разпределение на Колмогоров, табулирана в [5], [6], [29]. За да бъде приведена $K(y)$ с три знака след деветките, необходимо е прилагането на апроксимацията $K(y)\approx 1-2\exp(-2y^2)$ за $y>2{,}22$.

Нулевата хипотеза за куповете от клас N се приема с вероятност $P>0{,}9$. В този частен случай алтернативната хипотеза е поставена в по-изгодно положение, тъй като $k=0$.

Както се вижда от табл. 5, алтернативната хипотеза се приема с вероятност $P>0{,}999$, 0,999, 0,99 и 0,99999 999 съответно за класовете MD, D, VD и ED. Тя се приема и за обединените извадки — $P>0{,}99999$ за Σ', $P>0{,}99999\,99$ за Σ'' и $P>0{,}9999$ за Σ.

Заслужава да се отбележи, че само за клас Σ' вероятностите, с които се приема алтернативната хипотеза, при χ^2-критерия и критерия на Смирнов съществува отличие. Резултатите от двата критерия са почти идентични. Интересно е също така, че (i) и (k) не са близки до медианите.

Изводът е: Критерият на Смирнов потвърждава изводите от т. 4.

6. СРАВНЕНИЕ МЕЖДУ $\overline{\mathfrak{N}}_s$ И $\overline{\mathfrak{N}}_n$

Както се вижда от фиг. 1—8, извадките $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$ не принадлежат към нормална съвкупност. Да означим определените от извадките средни с $\overline{\mathfrak{N}}_s$ и $\overline{\mathfrak{N}}_n$, а дисперсиите — с s_s^2 и s_n^2. В този случай не съществува състоятелен критерий за проверка на хипотезата

$$H_0: \gamma-\delta=0, \tag{7}$$

където γ и δ са генералните средни. Даже при знаменитата проблема на Беренс — Фишер, когато $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$ са извадки съответно от нормалните съвкупности $\mathbf{N}(\gamma, \sigma_s^2)$ и $\mathbf{N}(\delta, \sigma_n^2)$, при $\sigma_s^2 \neq \sigma_n^2$ са налице огромни трудности (вж. [18], [21] и особено [30]).

Извадките $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$ са получени чрез изоплетни карти. Следователно самите извадки са „замърсени". А може да се очаква (вж. по аналогичен повод [31]), като се има пред вид, че се изследва повърхностно асоциране, и съвкупностите да бъдат „замърсени".

Тези съображения ни дават основание да проверим некоректно хипотезата H_0 (7), така да се каже, в нулево приближение.

Ако двете съвкупности са $\mathbf{N}(\gamma, \sigma_s^2)$ и $\mathbf{N}(\delta, \sigma_n^2)$, при

$$\sigma_s^2=\sigma_n^2=\sigma \tag{8}$$

критерият за проверка на нулевата хипотеза (7) е

$$t_{n_1+n_2-2}=\frac{\overline{\mathfrak{N}}_s-\overline{\mathfrak{N}}_n}{s_0} \tag{9}$$

с

$$s_0=\left\{\frac{(n_1+n_2)[(n_1-1)s_s^2+(n_2-1)s_n^2]}{n_1 n_2(n_1+n_2-2)}\right\}^{1/2}, \tag{10}$$

където n_1 и n_2 са обемите на извадките $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$, а t има n_1+n_2-2 степени на свобода (извеждането на (9)—(10) е приведено в [21] и [32]).

Да отбележим, че прилагането на (9)—(10) е коректно само при условието (8). Следователно преди определянето на $t_{n_1+n_2-2}$ е необходима проверката на

$$s_s^2=s_n^2 \tag{11}$$

например с F-критерия на Фишер

$$F=\frac{s_s^2}{s_n^2}, \tag{12}$$

където без ограничение $s_s^2>s_n^2$.

Но в разглеждания от нас случай

$$\sigma_s^2 \neq \sigma_n^2 \tag{13}$$

и задачата за проверка на нулевата хипотеза (7) се усложнява. Ето защо ще се възползваме от приближеното решение на Welch [33]—[36] и спе-

циалните таблици на Aspin [37] и Tricket, Welch, James [38]. Съгласно Welch критерият за проверка на H_0 е

$$t_\nu = \frac{\overline{\mathfrak{N}}_s - \overline{\mathfrak{N}}_n}{\sqrt{\frac{s_s^2}{n_1} + \frac{s_n^2}{n_2}}} \tag{14}$$

с ν степени на свобода

$$\frac{1}{\nu} = \frac{c^2}{\nu_1} + \frac{(1-c)^2}{\nu_2}, \tag{15}$$

където

$$c = \frac{\frac{s_s^2}{n_1}}{\frac{s_s^2}{n_1} + \frac{s_n^2}{n_2}}; \tag{16}$$

t_ν от (14) има приближено t-разпределение с ν степени на свобода. При това $\min(\nu_1, \nu_2) < \nu < \nu_1 + \nu_2$ и при $\nu_1 > 30$ и $\nu_2 > 30$ t_ν е величина, приблизително нормално разпределена.

(Както е известно, t-критерият не е чувствителен в случай на една извадка, за разпределения, не твърде отличаващи се от нормалното [27]. Той не е много чувствителен и при повече извадки [39]. Съгласно Lehman [27] това не е вярно за F-критерия, докато в [40] са приведени данни, подкрепящи твърдението, че и F-критерият не е твърде чувствителен към отклоненията от нормално разпределение.)

Резултатите от проверката на хипотезата H_0, които могат да се разглеждат като твърде приблизителни, са дадени в табл. 6. Моментите са пресметнати от негрупираните разпределения, следователно те са точни. $\overline{\mathfrak{N}}_s$, $\overline{\mathfrak{N}}_n$, s_s^2 и s_n^2 са средните и дисперсиите на случайните величини $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$, а $\overline{\mathfrak{N}}_{s+n}$ и s_{s+n}^2 — обединените извадки. Разстоянието между средните е $d = \overline{\mathfrak{N}}_s - \overline{\mathfrak{N}}_n$. $F = s_1^2/s_2^2$, където $s_1^2 > s_2^2$. Приведени са доверителните граници на отношението σ_1^2/σ_2^2 на неизвестните дисперсии с коефициент на увереност $(1-2Q)100\,\% = 90\,\%$, пресметнати от

$$F/[F(5\,\%;\ \mu_1, \mu_2)] < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F[F(5\,\%;\ \mu_2, \mu_1)] \tag{17}$$

с помощта на таблиците в [6], [19], [22]. Приведена е и величината $F(0{,}05\,\%;\ \mu_1, \mu_2)$. (При μ_1, μ_2, намиращи се в табличните интервали $120-\infty$, $500-\infty$, $F_{\text{табл.}}$ е определяно с помощта на квантилите на B-разпределението.) Степените на свобода $\mu = \mu_1 + \mu_2 = n_1 + n_2 - 2$ са от табл. 2. t е пресметнато по (9) и в рамките на нашето приближение имаме $t_\mu = t_\nu$. Но доколкото μ и ν съществено се отличават, определяни са две стойности на разпределението на Стюдент — $S_\mu(t)$ и $S_\nu(t)$ — по [41]. За големи μ и ν $S(t)$ е пресмятано с нормално приближение.

От табл. 6 се вижда, че за всички разстояния и обединения имаме $F > F(0{,}05\,\%;\ \mu_1,\ \mu_2)$. При това само за D-куповете $s_n^2 > s_s^2$ (при всички други случаи имаме $s_s^2 > s_n^2$).

Таблица 6

N	$\overline{\mathfrak{N}}_s = 437{,}86$ $s^2_s = 256\,969{,}53$ $s_s = 506{,}92$ $F(0{,}05\%) = 3{,}00$ $\mu = 82$ $S_\mu(t) = 0{,}9309$	$d = 119{,}80$ $F = 5{,}092$ $2{,}92 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 9{,}88$ $t = 1{,}497$	$\overline{\mathfrak{N}}_n = 318{,}06$ $s_n^2 = 50\,460{,}87$ $s_n = 224{,}63$ $F(5\%) = 1{,}74$ $\nu = 23$ $S_\nu(t) = 0{,}9260$	$\overline{\mathfrak{N}}_{s+n} = 348{,}01$ $s^2_{s+n} = 102\,337{,}17$ $s_{s+n} = 319{,}90$
MD	$\overline{\mathfrak{N}}_s = 257{,}08$ $s^2_s = 24\,013{,}78$ $s_s = 154{,}96$ $F(0{,}05\%) = 2{,}05$ $\mu = 207$ $S_\mu(t) = 0{,}99481$	$d = 58{,}24$ $F = 1{,}379$ $0{,}95 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2{,}07$ $t = 2{,}587$	$\overline{\mathfrak{N}}_n = 198{,}84$ $s^2_n = 17410{,}50$ $s_n = 131{,}95$ $F(5\%) = 1{,}45$ $\nu = 71$ $S_\nu(t) = 0{,}99433$	$\overline{\mathfrak{N}}_{s+n} = 212{,}62$ $s^2_{s+n} = 19\,480{,}57$ $s_{s+n} = 139{,}57$
D	$\overline{\mathfrak{N}}_s = 178{,}18$ $s^2_s = 9\,718{,}29$ $s_s = 98{,}58$ $F(0{,}05\%) = 1{,}87$ $\mu = 338$ $S_\nu(t) = 0{,}9468$	$d = 23{,}16$ $F = 1{,}486$ $1{,}09 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1{,}96$ $t = 1{,}619$	$\overline{\mathfrak{N}}_n = 155{,}02$ $s^2_n = 14\,442{,}94$ $s_n = 120{,}18$ $F(5+) = 1{,}36$ $= 180$ $S_\nu(t) = 0{,}9464$	$\overline{\mathfrak{N}}_{s+n} = 160{,}95$ $s^2_{s+n} = 13\,304{,}19$ $s_{s+n} = 115{,}34$
VD	$\overline{\mathfrak{N}}_s = 137{,}36$ $s^2_s = 5\,393{,}08$ $s_s = 73{,}44$ $F(0{,}05\%) = 1{,}55$ $\mu = 528$ $s_\mu(t) = 0{,}99999\,9725$	$d = 28{,}00$ $F = 2184$ $1{,}75 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 4{,}77$ $t = 5{,}008$	$\overline{\mathfrak{N}}_n = 109{,}36$ $s^2_n = 2\,469{,}11$ $s_n = 49{,}69$ $F(5\%) = 1{,}25$ $\nu = 190$ $S_\nu(t) = S_\mu(t)$	$\overline{\mathfrak{N}}_{s+n} = 116{,}86$ $s^2_{s+n} = 3\,397{,}88$ $s_{s+n} = 58{,}29$
ED	$\overline{\mathfrak{N}}_s = 102{,}72$ $s^2_s = 2\,702{,}89$ $s_s = 51{,}99$ $F(0{,}05\%) = 1{,}37$ $\mu = 909$ $S_\mu(t) = 0{,}99999\,99998\,22$	$d = 18{,}50$ $F = 2{,}049$ $1{,}80 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2{,}40$ $t = 6{,}272$	$\overline{\mathfrak{N}}_n = 84{,}22$ $s^2_n = 1319{,}32$ $s_n = 36{,}32$ $F(5\%) = 1{,}14$ $\nu = 489$ $S_\nu(t) = S_\mu(t)$	$\overline{\mathfrak{N}}_{s+n} = 90{,}70$ $s^2_{s+n} = 1\,879{,}32$ $s_{s+n} = 43{,}35$

Σ'	$\overline{\mathfrak{N}}_s = 237{,}54$ $s^2_s = 53\,177{,}67$ $s_s = 230{,}60$ $F(0{,}05\%) = 1{,}53$ $\mu = 629$ $S_\mu(t) = 0{,}99793$	$d = 46{,}24$ $F = 2317$ $1{,}90 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2{,}87$ $t = 2{,}878$	$\overline{\mathfrak{N}}_n = 191{,}30$ $s^2_n = 22\,951{,}16$ $s_n = 151{,}50$ $F(5\%) = 1{,}22$ $\nu = 202$ $S_\nu(t) = 0{,}99778$	$\overline{\mathfrak{N}}_{s+n} = 202{,}80$ $s^2_{s+n} = 30\,799{,}72$ $s_{s+n} = 175{,}50$
Σ''	$\overline{\mathfrak{N}}_s = 113{,}39$ $s^2_s = 3\,777{,}90$ $s_s = 61{,}46$ $F(0{,}05\%) = 1{,}31$ $\mu = 1439$ $S_\mu(t) = 0{,}99999\,99999\,9416$	$d = 19{,}22$ $F = 1{,}964$ $1{,}74 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2{,}24$ $t = 6{,}784$	$\overline{\mathfrak{N}}_n = 94{,}17$ $s^2_n = 1\,923{,}76$ $s_n = 43{,}86$ $F(5\%) = 1{,}13$ $\nu = 688$ $S_\nu(t) = S_\mu(t)$	$\overline{\mathfrak{N}}_{s+n} = 100{,}32$ $s^2_{s+n} = 2\,595{,}13$ $s_{s+n} = 50{,}94$
Σ	$\overline{\mathfrak{N}}_s = 144{,}93$ $s^2_s = 19\,187{,}52$ $s_s = 138{,}52$ $F(0{,}05\%) = 1{,}24$ $\mu = 2070$ $S_\mu(t) = 0{,}999704$	$d = 19{,}09$ $F = 1{,}770$ $1{,}59 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1{,}98$ $t = 3{,}443$	$\overline{\mathfrak{N}}_n = 125{,}84$ $s^2_n = 10\,841{,}65$ $s_n = 104{,}12$ $F(5\%) = 1{,}11$ $\nu = 926$ $S_\nu(t) = 0{,}99971\,8$	$\overline{\mathfrak{N}}_{s+n} = 131{,}53$ $s^2_{s+n} = 13\,399{,}20$ $s_{s+n} = 115{,}75$

$S_\mu(t)$ и $S_\nu(t)$ от табл. 6, макар и приблизително, показват, че за всички случаи хипотезата H_0 (7) трябва да бъде отхвърлена. С други думи средните на случайните величини $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$ съществено се отличават. Въпреки че проверката е несъстоятелна, оказва се, че $S_\mu(t) \approx S_\nu(t)$. При $\mu, \nu \to \infty$ в това няма нищо удивително, тъй като $t_\mu = t_\nu$ и очевидно имаме асимптотична нормалност, но даже и за N-куповете $S_\mu(t) \approx S_\nu(t)$, а $\nu = 23$.

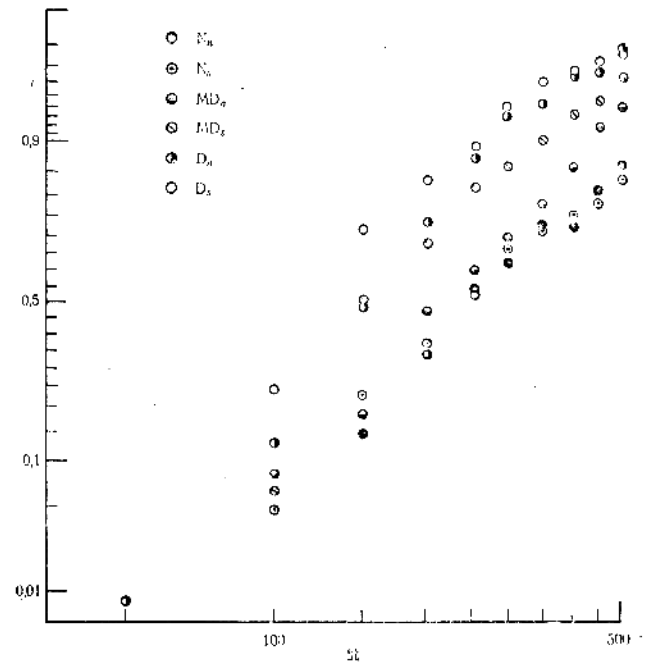
Хипотезата H_0 се отхвърля за N-куповете с $P > 0{,}9$, за MD — с $P > 0{,}99$, за D — с $P > 0{,}9$, за VD — с $P > 0{,}99999\,9$, за ED — с $P > 0{,}99999\,9999$, при обединените извадки Σ' — с $P > 0{,}99$ и Σ'' — с $P > 0{,}99999\,99999\,9$, а за всички изследвани купове Σ — с $P > 0{,}999$.

$\overline{\mathfrak{N}}_s$, $\overline{\mathfrak{N}}_n$ и $\overline{\mathfrak{N}}_{s+n}$ за всички класове дават представа за изменението на средната видима населеност с разстоянието.

Изводът е: Несъстоятелната параметрична проверка води до приемането на алтернативната хипотеза — средните на случайните величини $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$ се отличават.

7. ТРАНСФОРМАЦИЯ В ЛОГАРИТМИЧНО-НОРМАЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

Тъй като случайните величини $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_n$ не са разпределени нормално, тук ще бъде предприет прост опит за преобразуване към нормално разпределени величини без въвеждането на нови параметри. Диаграмите на



Фиг. 10

квантилите, построени в логаритмично-вероятностна равнина (фиг. 10 за N, MD и D, фиг. 11 за VD и ED, фиг. 12 за Σ', Σ'' и Σ), показват, че в някои случаи логаритмичното преобразуване е перспективно.

Функцията на разпределението на една логаритмично-нормална случайна величина се определя от

$$P\{\mathfrak{N}\}=\Phi(u), \tag{18}$$

$$u=\frac{\lg\mathfrak{N}-\lg\xi}{\sigma}, \quad 0<\mathfrak{N}<\infty,$$

или

$$P\{\mathfrak{N}\}d\mathfrak{N}=\varphi(u)du=(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\exp\left[-\frac{(\lg\mathfrak{N}-\lg\xi)^2}{2\sigma^2}\right]d\lg\mathfrak{N}.$$

откъдето

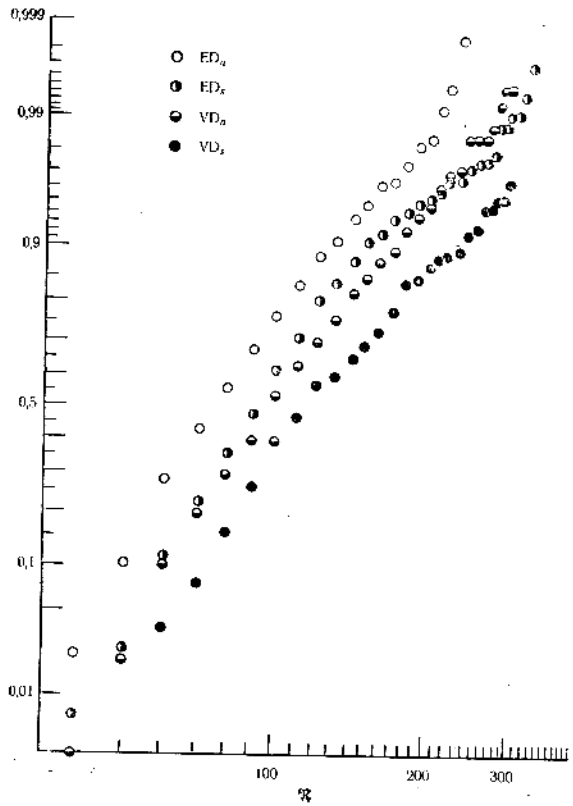
$$P\{\mathfrak{N}\}=\frac{M}{\sigma\mathfrak{N}}\varphi(u)$$

с $M=\lg e$.

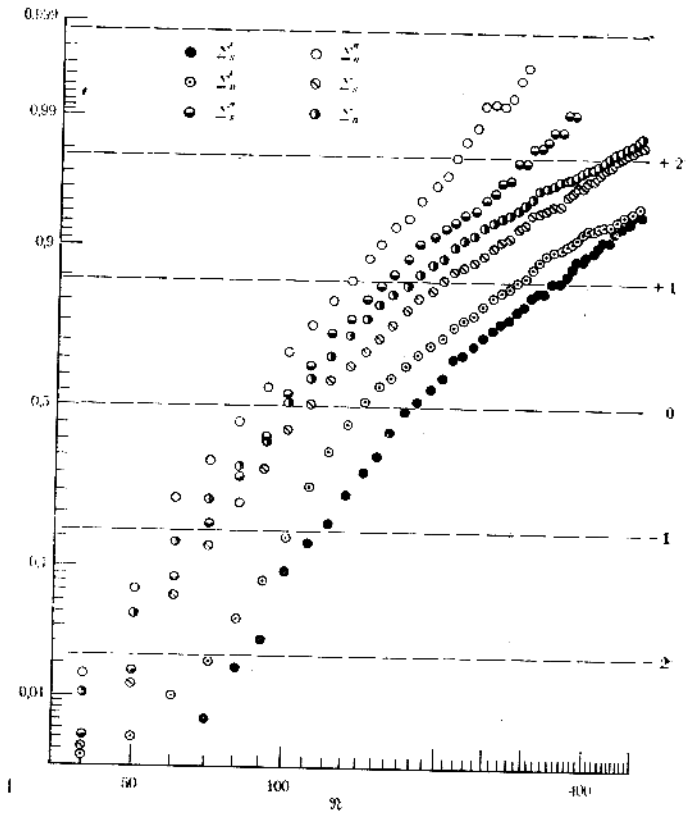
Средното и дисперсията са

$$E\{\lg\mathfrak{N}\}=\lg\xi,$$

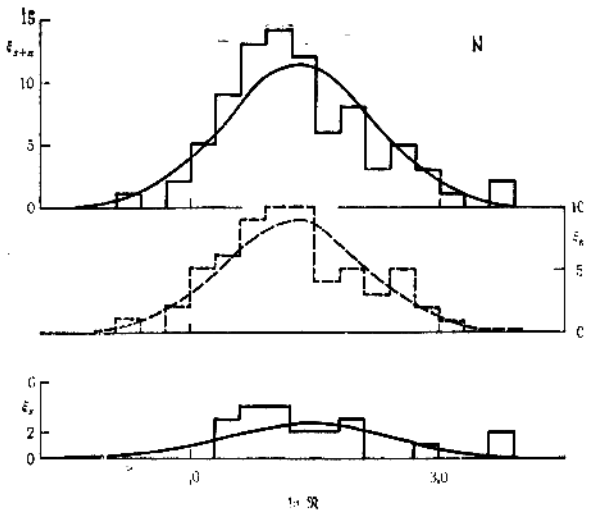
$$D\{\lg\mathfrak{N}\}=E\{(\lg\mathfrak{N}-\lg\xi)^2\}=\sigma^2.$$


0,999
0,99
0,9
0,5
0,1
0,01
ED$_a$
ED$_x$
VD$_a$
VD$_x$
100
200
300
ℜ

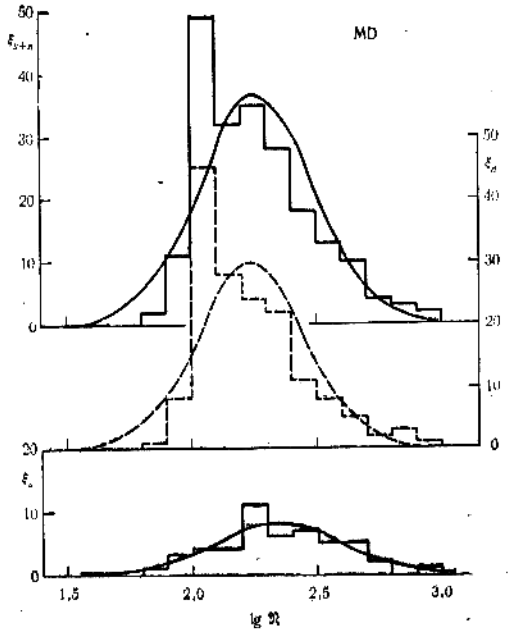
Фиг. 11


0,999
0,99
0,9
0,5
0,1
0,01
+ 2
+ 1
0
- 1
- 2
50
100
400
ℜ

Фиг. 12



Фиг. 13



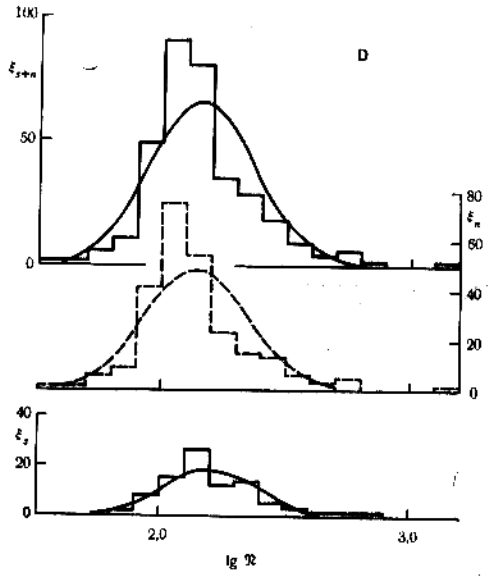
Фиг. 14

Средната и медианата на $\mathfrak{R}$ се определят от

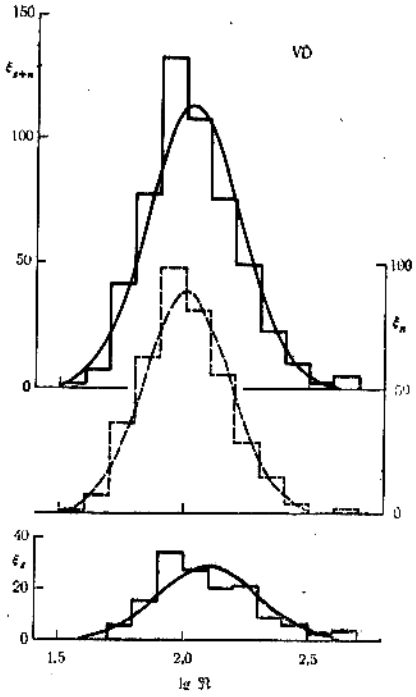
$$\overline{\mathfrak{R}}: \ \lg \mathfrak{R} = \lg \xi + \frac{\sigma^2}{2M},$$

(19)

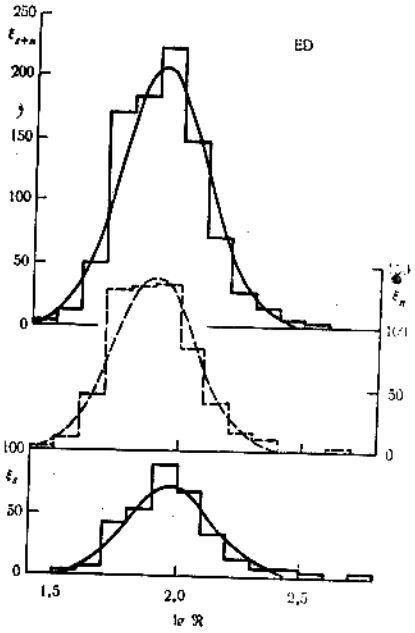
$$Me\,\mathfrak{R}: \ \lg \mathfrak{R} = \lg \xi.$$



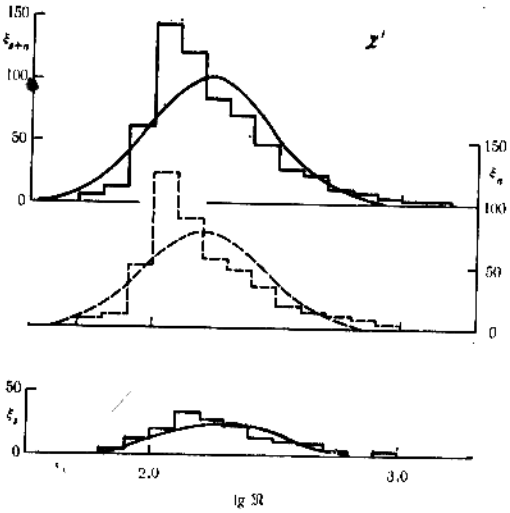
Фиг. 15



Фиг. 16



Фиг. 17



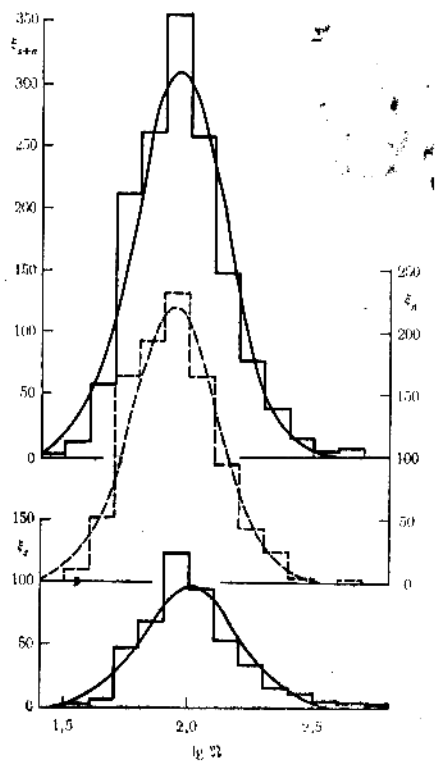
Фиг. 18

Таблица 1

$\lg \mathfrak{N}$	N			MD			D			VD			ED			Σ'			Σ''			Σ		
	ξ_s	ξ_n	ξ_{s+n}	ξ_s	ξ_n	ξ_{s+n}	ξ_s	ξ_n	ξ_{s+n}	ξ_s	ξ_n	ξ_{s+n}	ξ_s	ξ_n	ξ_{s+n}	ξ_s	ξ_n	ξ_{s+n}	ξ_s	ξ_n	ξ_{s+n}	ξ_s	ξ_n	ξ_{s+n}
1,45														2	2					2	2		2	2
1,55								1	1		1	1	2	9	11		1	1	2	10	12	2	11	13
1,65								1	1		7	7	6	44	50		1	1	6	51	57	6	52	58
1,75		1	1					6	6	5	36	41	42	128	170		7	7	47	164	211	47	171	218
1,85				1	1	2	2	9	11	15	62	77	53	131	184	3	10	13	68	193	261	71	203	274
1,95		2	2	3	8	11	8	41	49	34	98	132	89	133	222	11	51	62	123	231	354	134	282	416
2,05		5	5	4	45	49	15	75	90	27	81	108	67	82	149	19	125	144	94	163	257	113	288	401
2,15	3	6	9	4	28	32	26	54	80	20	55	75	33	39	72	33	88	121	53	94	147	86	182	268
2,25	4	9	13	11	24	35	12	23	35	21	28	49	13	14	27	27	56	83	34	42	76	61	98	159
2,35	4	10	14	6	22	28	13	15	28	9	14	23	6	9	15	23	47	70	15	23	38	38	70	108
2,45	2	10	12	7	11	18	5	13	18	6	4	10	5		5	14	34	48	11	4	15	25	38	63
2,55	2	4	6	5	8	13	3	6	9	2		2	2		2	10	18	28	4		4	14	18	32
2,65	3	5	8	5	5	10	1	3	4	3	2	5		1	1	9	13	22	3	3	6	12	16	28
2,75		3	3	2	2	4	1	5	6				1		1	3	10	13	1		1	4	10	14
2,85		5	5		3	3	1		1							1	8	9				1	8	9
2,95	1	2	3	1	1	2										2	3	5				2	3	5
3,05		1	1														1	1					1	1
3,15								1	1								1	1					1	1
3,25	2		2													2		2				2		2

Плътностите на трансформираните случайни величини ξ_s, ξ_n и ξ_{s+n} за всички разстояния и обединения са дадени на фиг. 13—20.

Теоретичните логаритмично-нормални честоти са приведени в табл. 7. Съгласуваността между теоретичните и наблюдаваните честоти, проверена с помощта на критерия χ^2, е показана на табл. 8.

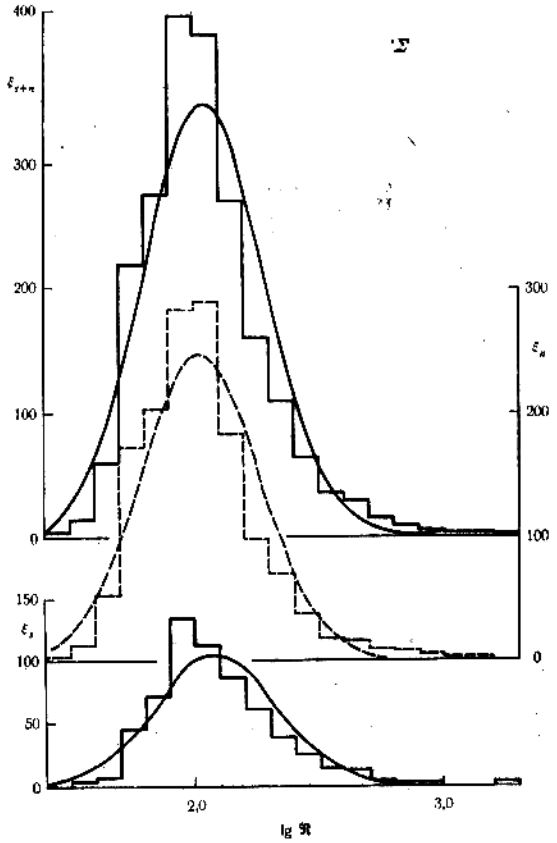


Фиг. 19

Таблица 8

Купове	ξ_s		ξ_n	
	χ^2	μ	χ^2	μ
N	4,753	1	3,177	5
MD	2,466	3	41,912	5
D	7,592	4	49,433	6
VD	10,062	5	8,444	5
ED	20,672	5	18,507	5
Σ'	10,168	6	116,832	8
Σ''	41,427	6	27,774	6
Σ	70,654	11	177,567	9

Непосредствено от фиг. 13—20, както и от табл. 7 се вижда, че около средните съгласие в някои случаи не съществува, но крилата на наблюдаваните разпределения се описват добре с логаритмично-нормална плътност.



Фиг. 20

При ниво на значимост $Q=1\,\%$ съгласие между теоретичните и наблюдаваните честоти има за N — ξ_s и ξ_n, MD — ξ_s, D — ξ_s, VD — ξ_s и ξ_n и Σ' — ξ_s.

Да проверим и в този случай нулевата хипотеза: средните на двете извадки са равни, ако се предположи, че разпределенията са логаритмично-нормални. Данните са приведени в табл. 9, където $\bar{\xi}_s$, $\bar{\xi}_n$, s^2_{sl}, s^2_{nl} са средните и дисперсиите на двете извадки. Разстоянието между средните е $d=\bar{\xi}_s-\bar{\xi}_n$. Другите означения са аналогични на тези от табл. 6. Но тук вече

$$F<F(0{,}05\,\%;\ \mu_1, \mu_2),$$

следователно използването на приближението на Welch не е необходимо. Величината $S_\mu(t)$ е вече представителна.

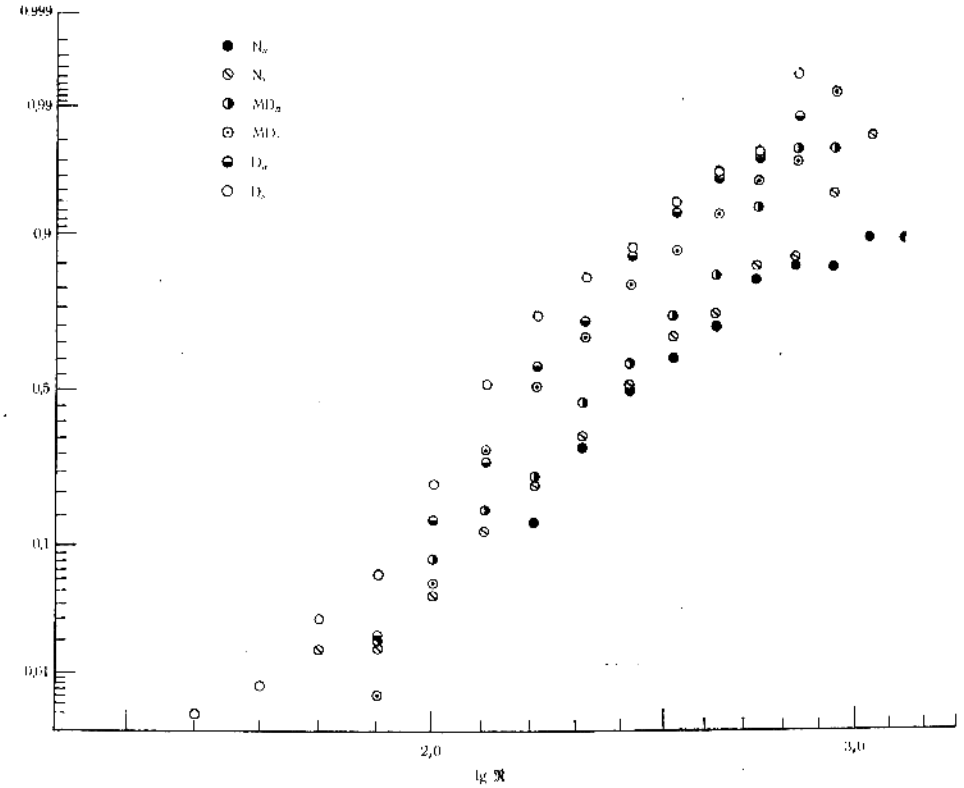
Проверката на нулевата хипотеза показва, че тя се отхвърля при всички разстояния — за N-куповете с $P>0{,}8$, за MD — с $P>0{,}99$, за D — с $P>0{,}99$, за VD — с $P>0{,}99999\,9$, за ED — с $P>0{,}99999\,99999\,9$ и за обединените извадки Σ' с $P>0{,}999$ и Σ'' с $P>0{,}99999\,99999\,999$, а за всички изследвани купове Σ — с $P>0{,}99999\,9$.

Интересно е да се отбележи, че за всички случаи с изключение на клас N алтернативната хипотеза се възприема с по-висока вероятност, отколкото в т. 6.

Изводът е: Логаритмично-нормалното приближение също отхвърля нулевата хипотеза.

8. ТРАНСФОРМАЦИЯ В ЛОГАРИТМИЧНО-ЛОГАРИТМИЧНО-НОРМАЛНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

Изводът от т. 7 се основава върху предположението, че съществува съгласуваност между наблюдаваните и теоретичните (логаритмично-нормални) честоти. Обаче табл. 8 показва, че съгласие при ниво на



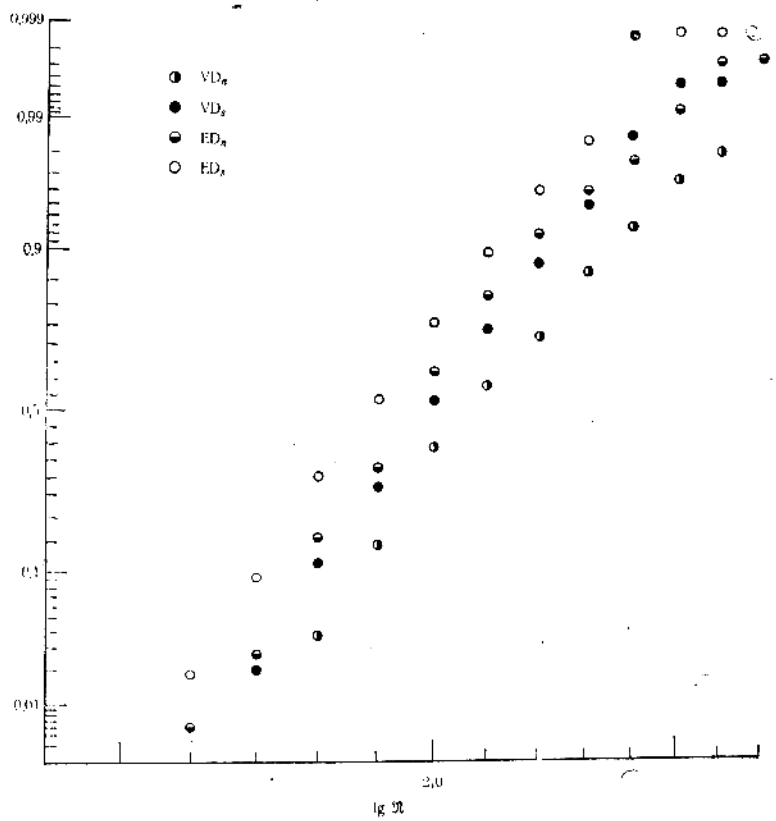
Фиг. 21

значимост 5% имаме само в 5 случая (от 10). Тази неувереност, която впрочем може да бъде спекулативно отстранена при избор на по-високо ниво на значимост, както и проучването на фундаменталния въпрос —

Таблица 9

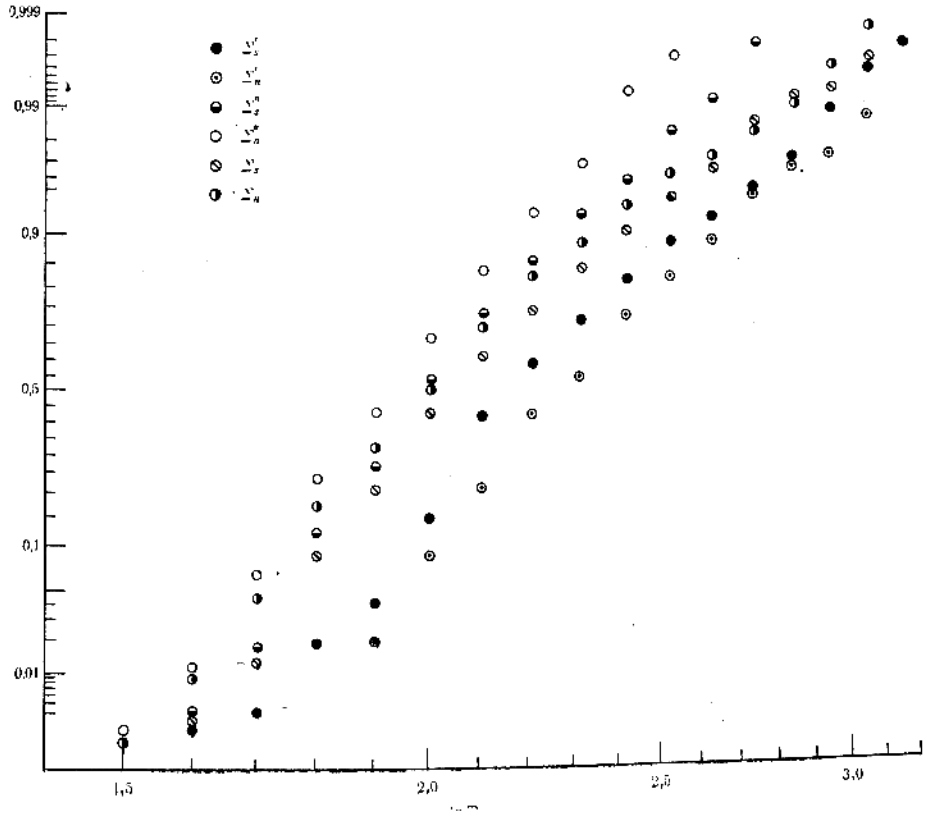
N	$\overline{\xi}_s=2{,}488095$ $s^2_{sl}=0{,}105476$ $s_{sl}=0{,}324771$ $F(0{,}05\%)=3{,}00$	$d=0{,}076190$ $F=1{,}343$ $0{,}77<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<2{,}60$ $t=1{,}036$ $S_\mu(t)=0{,}848$	$\overline{\xi}_n=2{,}411905$ $s^2_{nl}=0{,}078525$ $s_{nl}=0{,}280224$ $F(5\%)=1{,}74$	$\overline{\xi}_{s+n}=2{,}430952$ $s^2_{(s+n)l}=0{,}085175$ $s_{(s+n)l}=0{,}291848$
MD	$\overline{\xi}_s=2{,}345918$ $s^2_{sl}=0{,}057483$ $s_{sl}=0{,}239756$ $F=(0{,}05\%)=2{,}05$	$d=0{,}110475$ $F=1{,}258$ $0{,}87<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}89$ $t=3{,}069$ $S_\mu(t)=0{,}99878$	$\overline{\xi}_n=2{,}235443$ $s^2_{nl}=0{,}045710$ $s_{nl}=0{,}213800$ $F(5\%)=1{,}45$	$\overline{\xi}_{s+n}=2{,}261594$ $s^2_{(s+n)l}=0{,}050447$ $s_{(s+n)l}=0{,}224605$
D	$\overline{\xi}_s=2{,}202874$ $s^2_{sl}=0{,}035776$ $s_{sl}=0{,}189147$ $F(0{,}05\%)=1{,}87$	$d=0{,}071846$ $F=1{,}241$ $0{,}91<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}64$ $t=2{,}814$ $S_\mu(t)=0{,}99741$	$\overline{\xi}_n=2{,}131028$ $s^2_{nl}=0{,}044400$ $s_{nl}=0{,}210714$ $F(5\%)=1{,}36$	$\overline{\xi}_{s+n}=2{,}149412$ $^2_{(s+n)l}=0{,}043067$ $s_{(s+n)l}=0{,}207527$
VD	$\overline{\xi}_s=2{,}093662$ $s^2_{sl}=0{,}039073$ $s_{sl}=0{,}197669$ $F(0{,}05\%)=1{,}55$	$d=0{,}090569$ $F=1{,}314$ $1{,}05<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}67$ $t=5{,}144$ $S_\mu(t)=0{,}99999\ 9866$	$\overline{\xi}_n=2{,}003093$ $s^2_{nl}=0{,}029732$ $s_{nl}=0{,}172430$ $F(5\%)=1{,}25$	$\overline{\xi}_{s+n}=2{,}027358$ $s^2_{(s+n)l}=0{,}033778$ $s_{(s\ \ n)l}=0{,}183786$
ED	$\overline{\xi}_s=1{,}974451$ $s^2_{sl}=0{,}030218$ $s_{sl}=0{,}173833$ $F(0{,}05\%)=1{,}37$	$d=0{,}078505$ $F=1{,}104$ $0{,}97<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}29$ $t=6{,}712$ $S_\mu(t)=0{,}99999\ 99999\ 9040$	$\overline{\xi}_n=1{,}895946$ $s^2_{nl}=0{,}027361$ $s_{nl}=0{,}165411$ $F(5\%)=1{,}14$	$\overline{\xi}_{s+n}=1{,}923436$ $s^2_{(s+n)l}=0{,}029733$ $s_{(s+n)l}=0{,}172433$
Σ	$\overline{\xi}_s=2{,}285669$ $s^2_{sl}=0{,}061412$ $s_{sl}=0{,}247814$ $F(0{,}05\%)=1{,}53$	$d=0{,}082505$ $F=1{,}058$ $0{,}87<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}31$ $t=3{,}692$ $S_\mu(t)=0{,}99987\ 8$	$\overline{\xi}_n=2{,}203164$ $s^2_{nl}=0{,}058056$ $s_{nl}=0{,}240947$ $F(5\%)=1{,}22$	$\overline{\xi}_{s+n}=2{,}223692$ $s^2_{(s+n)l}=0{,}060069$ $s_{(s+n)l}=0{,}245089$

Σ''	$\bar{\xi}_s=2{,}011171$ $s^2_{sl}=0{,}035902$ $s_{sl}=0{,}189478$ $F(0{,}05\%)=1{,}31$	$d=0{,}072804$ $F=1{,}157$ $1{,}02<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}32$ $t=7{,}142$ $S_\mu(t)=0{,}99999\ 99999\ 99540$	$\bar{\xi}_n=1{,}938367$ $s^2_{nl}=0{,}031019$ $s_{nl}=0{,}176121$ $F(5\%)=1{,}13$	$\bar{\xi}_{s+n}=1{,}961658$ $s^2_{(s+n)l}=0{,}033711$ $s_{(s+n)l}=0{,}183606$
Σ	$\bar{\xi}_s=2{,}080906$ $s^2_{sl}=0.056596$ $s_{sl}=0{,}237899$ $F(0{,}05\%)=1{,}24$	$d=0{,}056216$ $F=1{,}025$ $0{,}92<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}15$ $t=4{,}963$ $S_\mu(t)=0{,}99999\ 9653$	$\bar{\xi}_n=2{,}024690$ $s^2_{nl}=0{,}055216$ $s_{nl}=0{,}234980$ $F(5\%)=1{,}11$	$\bar{\xi}_{s+n}=2{,}041458$ $s^2_{(s+n)l}=0{,}056262$ $s_{(s+n)l}=0{,}237196$



Фиг. 22

какво е разпределението на населеностите на куповете — предполага провеждането на още един опит за апроксимация. Той също има преимуществото да не се въвежда нов параметър и се състои в трансформация в логаритмично-логаритмично-нормално разпределение.



Фиг. 23

Диаграмите на квантилите, построени върху логаритмично-логаритмично-вероятностна равнина (фиг. 21 за N, MD, D, фиг. 22 за VD и ED, фиг. 23 за Σ', Σ'' Σ), показват, че подобен опит трябва да е успешен.

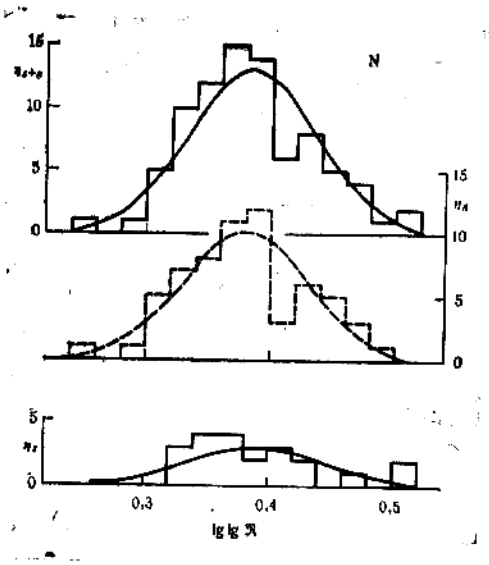
Ясно е, че логаритмично-логаритмично-нормалното разпределение се получава при следваща трансформация, аналогична на (18). Трансформираната случайна величина да означим с η (запазвайки значението на индексите).

Теоретичните логаритмично-логаритмично-нормални честоти са дадени в табл. 10, а резултатите от проверката за съгласие — в табл. 11.

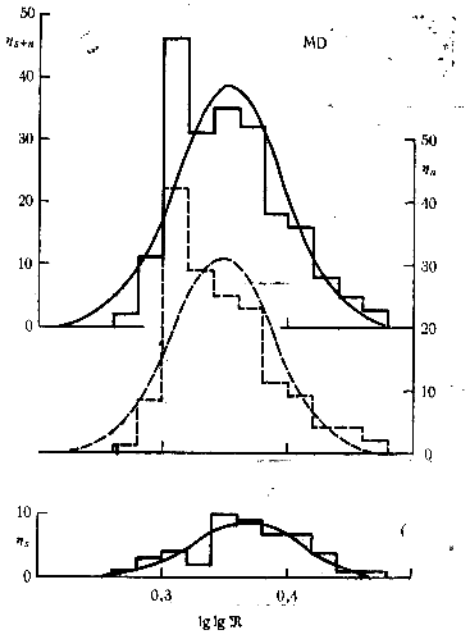
От десетте стойности на χ^2 за класовете по разстояние осем не превишават даже $\chi^2(5\%, \mu)$. Изключенията са за MD и D — η_n. Най-общо казано, логлогнормалното приближение е по-добро от логнормалното. Това се вижда и от непосредственото сравнение между наблюдаваните и теоретичните честоти (фиг. 24—31).

Таблица 10

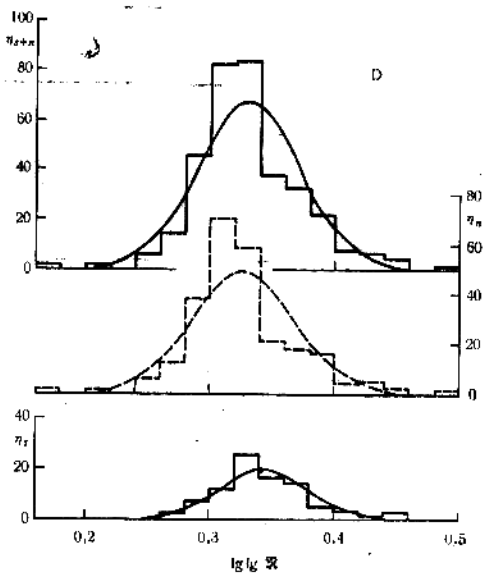
$\lg \mathfrak{N}$	N			MD			D			VD			ED			Σ'			Σ''			Σ		
	η_s	η_n	η_{s+n}	η_s	η_n	η_{s+n}	η_s	η_n	η_{s+n}	η_s	η_n	η_{s+n}	η_s	η_n	η_{s+n}	η_s	η_n	η_{s+n}	η_s	η_n	η_{s+n}	η_s	η_n	η_{s+n}
0,17								1	1					2	2		1	1		2	2		3	3
0,19													2	8	10				2	8	10	2	8	10
0,21								1	1		7	7	1	15	16		1	1	1	22	23	1	23	24
0,23										2	11	13	10	66	76				12	77	89	12	77	89
0,25		1	1					6	6	7	42	49	47	125	172		7	7	54	167	221	54	174	228
0,27				1	1	2	2	12	14	13	54	67	53	112	165	3	13	16	66	166	232	69	179	248
0,29		1	1	3	8	11	7	38	45	31	85	116	74	117	191	10	47	57	105	202	307	115	249	364
0,31		5	5	4	42	46	12	70	82	28	76	104	71	77	148	16	117	133	99	153	252	115	270	385
0,33	3	7	10	2	29	31	25	58	83	17	62	79	32	43	75	30	94	124	49	105	154	79	199	278
0,35	4	8	12	10	25	35	16	21	37	23	30	53	15	16	31	30	54	84	38	46	84	68	100	168
0,37	4	11	15	9	23	32	14	18	32	10	15	25	6	10	16	27	52	79	16	25	41	43	77	120
0,39	2	12	14	7	11	18	5	16	21	6	4	10	7		7	14	39	53	13	4	17	27	43	70
0,41	3	3	6	7	9	16	3	4	7	4	1	5		1	1	13	16	29	4	2	6	17	18	35
0,43	2	6	8	4	4	8	1	5	6	1	1	2	1		1	7	15	22	2	1	3	9	16	25
0,45		5	5	1	4	5	2	2	4							3	11	14				3	11	14
0,47	1	3	4	1	2	3										2	5	7				2	5	7
0,49		1	1					1	1								2	2					2	2
0,51	2		2													2		2				2		2



Фиг. 24



Фиг. 25



Фиг. 26

И в разглеждания случай условието за равенството на дисперсиите е изпълнено, следователно проверката на нулевата хипотеза може да се извърши по (9)—(10).

Основните резултати са дадени в табл. 12, аналогична на табл. 6 и 9,

Таблица 11

Купове	η_s		η_n	
	χ^2	μ	χ^2	μ
N	2,785	1	3,183	4
MD	0,493	3	34,870	10
D	7,167	5	45,326	12
VD	15,886	10	11,209	14
ED	18,522	13	23,079	16
Σ'	17,934	12	104,166	16
Σ''	38,239	14	27,358	18
Σ	54,799	19	115,912	23

Таблица 12

N	$\overline{\eta}_s=0{,}391190$ $s^2_{stl}=0{,}00308476$ $s_{stl}=0{,}05554063$ $F(0{,}05\%)=3{,}00$	$d=0{,}011269$ $F=1{,}250$ $0{,}72<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<2{,}42$ $t=0{,}874$ $S_\mu(t)=0{,}808$	$\overline{\eta}_n=0{,}379921$ $s^2_{ntl}=0{,}00246733$ $s_{ntl}=0{,}04967225$ $F(5\%)=1{,}74$	$\overline{\eta}_{s+n}=0{,}382738$ $s^2_{(s+n)tl}=0{,}00261048$ $s_{(s+n)tl}=0{,}05109290$
MD	$\overline{\eta}_s=0{,}368673$ $s^2_{stl}=0{,}00197789$ $s_{stl}=0{,}04447349$ $F(0{,}05\%)=2{,}05$	$d=0{,}021205$ $F=1{,}195$ $0{,}82<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}79$ $t=3{,}117$ $S_\mu(t)=0{,}99896$	$\overline{\eta}_n=0{,}347468$ $s^2_{ntl}=0{,}00165565$ $s_{ntl}=0{,}04068970$ $F(5\%)=1{,}45$	$\overline{\eta}_{s+n}=0{,}352488$ $s^2_{(s+n)tl}=0{,}00180434$ $s_{(s+n)tl}=0{,}04247750$
D	$\overline{\eta}_s=0{,}342471$ $s^2_{stl}=0{,}00128190$ $s_{stl}=0{,}03580368$ $F(0{,}05\%)=1{,}87$	$d=0{,}016720$ $F=1{,}308$ $0{,}96<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}73$ $t=3{,}389$ $S_\mu(t)=0{,}99960\,8$	$\overline{\eta}_n=0{,}325751$ $s^2_{ntl}=0{,}00167681$ $s_{ntl}=0{,}04094893$ $F(5\%)=1{,}36$	$\overline{\eta}_{s+n}=0{,}330029$ $s^2_{(s+n)tl}=0{,}00162507$ $s_{(s+n)tl}=0{,}04031219$
VD	$\overline{\eta}_s=0{,}318380$ $s^2_{stl}=0{,}00157289$ $s_{stl}=0{,}03965967$ $F(0{,}05\%)=1{,}55$	$d=0{,}018664$ $F=1{,}140$ $0{,}91<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}45$ $t=5{,}031$ $S_\mu(t)=0{,}99999\,9756$	$\overline{\eta}_n=0{,}299716$ $s^2_{ntl}=0{,}00137951$ $s_{ntl}=0{,}03714170$ $F(5\%)=1{,}25$	$\overline{\eta}_{s+n}=0{,}304717$ $s^2_{(s+n)tl}=0{,}00149690$ $s_{(s+n)tl}=0{,}03868973$

ED	$\bar{\eta}_s=0{,}293621$ $s^2_{sll}=0{,}00129432$ $s_{sll}=0{,}03597663$ $F(0{,}01\%)=1{,}37$	$d=0{,}017929$ $F=1{,}035$ $0{,}91<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}21$ $t=7{,}095$ $S_\mu(t)=0{,}99999\ 99999\ 99403$	$\bar{\eta}_n=0{,}275692$ $s^2_{nll}=0{,}00133979$ $s_{nll}=0{,}03660314$ $F(5\%)=1{,}14$	$\bar{\eta}_{s+n}=0{,}281970$ $s^2_{(s+n)ll}=0{,}00139565$ $s_{(s+n)ll}=0{,}03735835$
Σ'	$\bar{\eta}_s=0{,}357166$ $s^2_{sll}=0{,}00202861$ $s_{sll}=0{,}04504013$ $F(0{,}05\%)=1{,}53$	$d=0{,}016976$ $F=1{,}038$ $0{,}85<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}29$ $t=4{,}036$ $S_\mu(t)=0{,}99997\ 28$	$\bar{\eta}_n=0{,}340190$ $s^2_{nll}=0{,}00210578$ $s_{nll}=0{,}04588875$ $F(5\%)=1{,}22$	$\bar{\eta}_{s+n}=0{,}344414$ $s^2_{(s+n)ll}=0{,}00213727$ $s_{(s+n)ll}=0{,}04623067$
Σ''	$\bar{\eta}_s=0{,}301247$ $s^2_{sll}=0{,}00150784$ $s_{sll}=0{,}03883095$ $F(0{,}05\%)=1{,}31$	$d=0{,}016043$ $F=1{,}010$ $0{,}89<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}15$ $t=7{,}342$ $S_\mu(t)=0{,}99999\ 99999\ 99895$	$\bar{\eta}_n=0{,}285204$ $s^2_{nll}=0{,}00149230$ $s_{nll}=0{,}03863026$ $F(5\%)=1{,}13$	$\bar{\eta}_{s+n}=0{,}290336$ $s^2_{(s+n)ll}=0{,}00155226$ $s_{(s+n)ll}=0{,}03939880$
Σ	$\bar{\eta}_s=0{,}315453$ $s^2_{sll}=0{,}00223059$ $s_{sll}=0{,}04722911$ $F(0{,}05\%)=1{,}24$	$d=0{,}012324$ $F=1{,}056$ $0{,}95<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1{,}18$ $t=5{,}330$ $S_\mu(t)=0{,}99999\ 99509$	$\bar{\eta}_n=0{,}303129$ $s^2_{nll}=0{,}00235575$ $s_{nll}=0{,}04853612$ $F(5\%)=1{,}11$	$\bar{\eta}_{s+n}=0{,}306805$ $s^2_{(s+n)ll}=0{,}00234913$ $s_{(s+n)ll}=0{,}04846783$

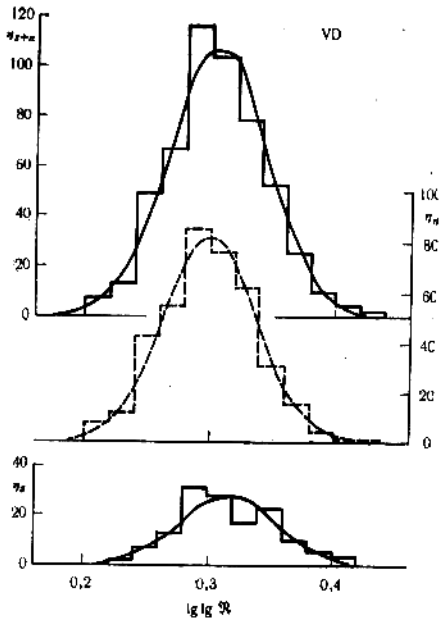
Нулевата хипотеза се отхвърля за N-куповете с вероятност $P>0{,}8$, за MD — с $P>0{,}99$, за D — с $P>0{,}999$, за VD — с $P>0{,}99999\ 9$, за ED — с $P>0{,}99999\ 99999\ 99$, за обединените извадки Σ' с $P>0{,}9999$ и Σ'' с $P>0{,}99999\ 99999\ 99$ и за всички изследвани купове Σ — с $P>0{,}99999\ 99$.

Изобщо вероятността, с която се отхвърля нулевата хипотеза, в този случай е по-висока, отколкото при логаритмично-нормалното приближение.

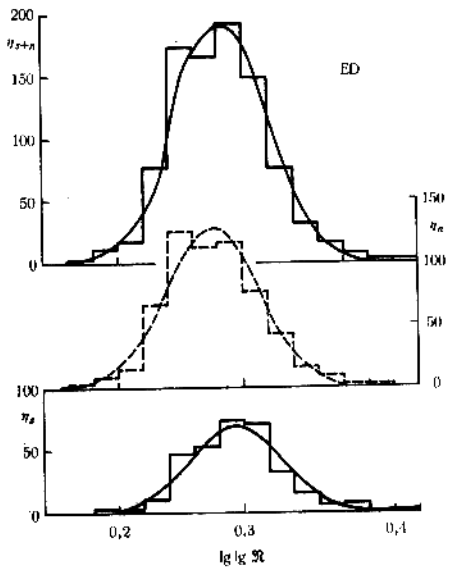
Изводите са:

1. Логаритмично-логаритмично-нормалното разпределение е подходящо за апроксимиране на населеностите в класове по разстояние.

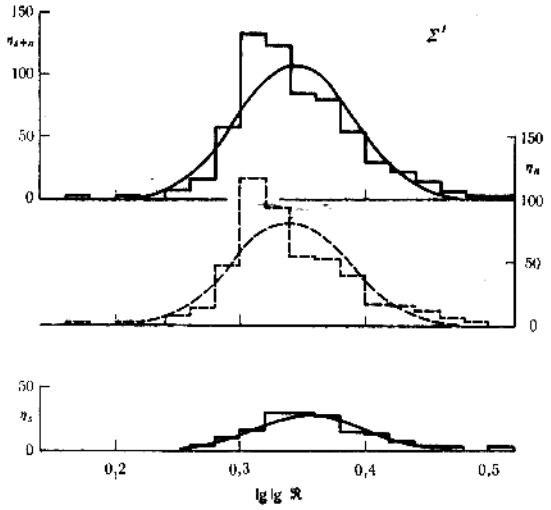
2. С твърде висока вероятност нулевата хипотеза H_0 за равенството на центровете на разпределения се отхвърля.



Фиг. 27



Фиг. 28

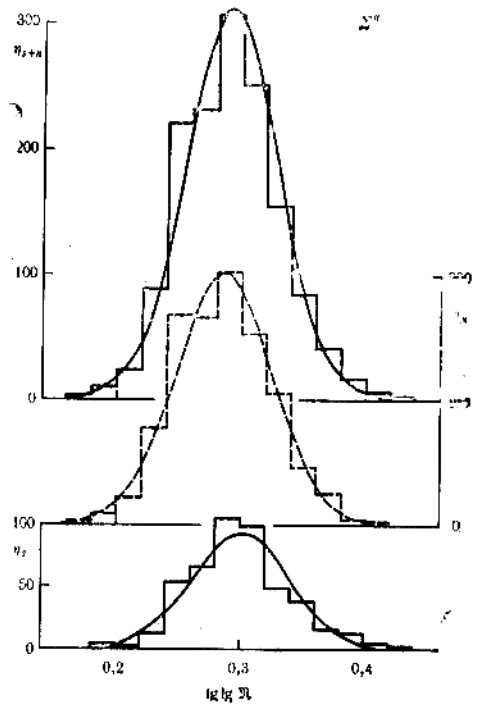


Фиг. 29

9. Γ-РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

Резултатите от т. 7 и 8 показват, че разпределението на населеностите на куповете от първи ред може да бъде представено като логаритмично-нормално, а още по-добре — като логаритмично-логаритмично-нормално. При това логаритмично-нормалното разпределение може да

има твърде просто физическо тълкуване [18] въз основа на идеите на Амбарцумян [42]—[45]. Не е изключена обаче възможността за по-добра апроксимация с помощта на друго разпределение. Един общ преглед на фиг. 1—8 показва, че е възможна апроксимация с Γ-разпределението.



Фиг. 30

Подобна апроксимация е използвана при представяне преброявания на галактики от Zonn [46], [47].

Γ-разпределението се дава с

$$\Gamma_z(p)=\int_0^z t^{p-1}e^{-t}dt, \quad p>0, \tag{20}$$

където p е единственият параметър. В случая е необходимо двупараметрично Γ-разпределение:

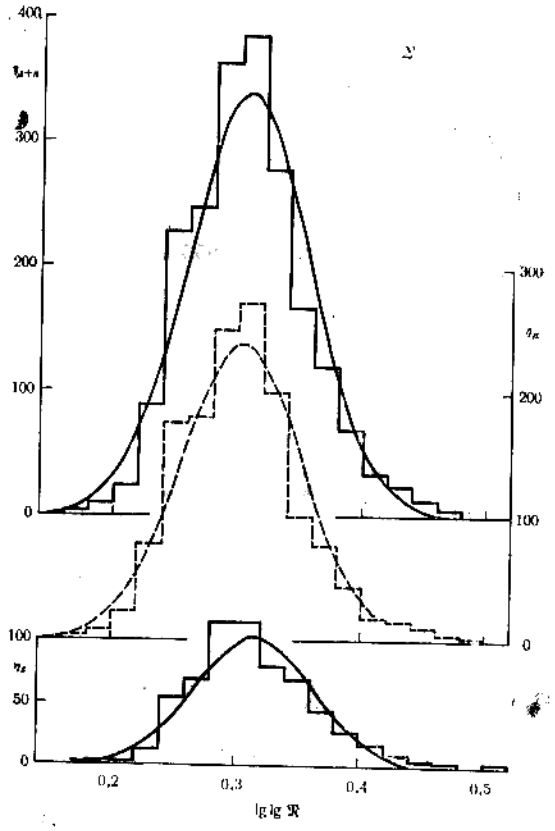
$$\Gamma_R(\alpha,\beta)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^R \mathfrak{N}^{\alpha-1}e^{-R}d\mathfrak{N}, \quad R=\beta\mathfrak{N}, \tag{21}$$

където $\alpha>0$, $\beta>0$ са параметрите, а $\Gamma(\alpha)$ е Γ-функцията. Във вида (21) Γ-разпределението може да бъде пресмятано от таблиците за непълна Γ-функция [48], [49]. Параметрите α и β се определят от

(22) $$\alpha=\frac{(\overline{\mathfrak{N}})^2}{s^2},\quad \beta=\frac{\overline{\mathfrak{N}}}{s^2},$$

като модата е при

(23) $$\mathfrak{N}=\frac{\alpha-1}{\beta},$$



Фиг. 31

а инфлексните точки се дават с

(24) $$\mathfrak{N}=\frac{\alpha-1\pm\sqrt{\alpha-1}}{\beta},\quad \alpha>1.$$

Уравнения (23) и (24) могат да бъдат получени от първата и втората производна на плътността на Γ-разпределението

(25) $$p=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\mathfrak{N}^{\alpha-1}\exp(-\beta\mathfrak{N}).$$

Параметрите α и β за всички изследвани плътности (негрупирани, логаритмично-нормални, логаритмично-логаритмично-нормални) са дадени в табл. 13.

Таблица 13

Купове	n	Негрупирани		Логаритмично-нормално разпределение		Логаритмично-логаритмично-нормално разпределение	
		α	β	α	β	α	β
N	n_s	0,746	0,001704	58,7	23,6	49,6	126,8
	n_n	2,005	0,006303	74,1	30,7	58,5	154,0
	n_{s+n}	1,183	0,003401	69,4	28,5	56,1	146,6
MD	n_s	2,752	0,010706	95,7	40,8	68,7	186,4
	n_n	2,271	0,011420	109,3	48,9	72,9	209,9
	n_{s+n}	2,321	0,010915	101,4	44,8	68,9	195,4
D	n_s	3,267	0,018335	135,6	61,6	91,5	267,2
	n_n	1,664	0,010734	102,3	48,0	63,3	194,3
	n_{s+n}	1,947	0,012098	107,3	49,9	67,0	203,1
VD	n_s	3,498	0,025470	112,2	53,6	64,4	202,4
	n_n	4,844	0,044290	135,0	67,4	65,1	217,3
	n_{s+n}	4,019	0,034392	121,7	60,0	62,0	203,6
ED	n_s	3,904	0,038004	129,0	65,3	66,6	226,8
	n_n	5,376	0,063837	131,4	69,3	56,7	205,8
	n_{s+n}	4,377	0,048262	124,4	64,7	56,7	202,0
Σ''	n_s	1,061	0,004467	85,1	37,2	62,9	176,1
	n_n	1,594	0,008335	83,6	38,0	55,0	161,6
	n_{s+n}	1,335	0,006584	82,3	37,0	55,5	161,2
Σ'''	n_s	3,403	0,030014	112,7	56,0	60,2	199,8
	n_n	4,610	0,048953	121,1	62,5	54,5	191,1
	n_{s+n}	3,878	0,038658	114,2	58,2	54,3	187,0
Σ'	n_s	1,095	0,007553	76,5	36,8	44,6	141,4
	n_n	1,460	0,011607	74,2	36,7	39,0	128,7
	n_{s+n}	1,291	0,009816	74,1	36,3	40,1	130,6

При $\alpha \to \infty$ ([50], [51]) разпределението асимптотично клони към нормалното и практически за α над 25—30 нормалното разпределение превъзходно апроксимира Γ-разпределението [49]. От табл. 13 се вижда, че по-добра апроксимация в нашия случай може да се очаква само за негрупираните разпределения (основна табл. 1 с параметри от табл. 6).

Γ-разпределенията са дадени на фиг. 1—8, а Γ-честотите (ζ) — в табл. 14.

Както се вижда от табл. 1 и 14, Γ-разпределението изобщо не представя по-добре наблюдаваните честоти от логаритмично-логаритмично-нормалното разпределение. Но за $\mathfrak{N} > \mathfrak{N}_{мода}$ при n съгласието е твърде добро. Следователно Γ-разпределението може да се използва при по-големи населености, където апроксимацията с логаритмично-логаритмично-нормалното разпределение се влошава.

Изводът е: При големи стойности на $\mathfrak{N}$ може да се използва Γ-разпределението.

10. ДИСКУСИЯ

Основната задача, поставена в настоящата работа, е да се провери хипотезата, че случайните величини, представляващи населеностите на купове от галактики, които формират фоновото поле и предполагаеми видими конфигурации, имат еднакви центрове на разпределение. Приложени са както непараметрически, така и параметрически методи за проверка. С увеличаване на мощността на методите се увеличава вероятността за приемане на алтернативната хипотеза. При това проверяемата хипотеза е проста. Но резултатите са в сила и за сложна хипотеза, доколкото разстоянието между центровете е винаги положително.

Следователно, каквито и да бъдат параметрите на генералната съвкупност, нашите резултати показват, че тя не е единна, а се състои от две подсъвкупности. Оценките на параметрите на двете подсъвкупности във всички случаи показват, че те значимо се отличават.

Неизбежният извод е, че подсъвкупностите действително отговарят на фоновото поле от купове от галактики и на конфигурациите, представляващи купове от втори ред. Този извод е доказателство за съществуването на купове от галактики от втори ред около Северния галактически полюс. По такъв начин отпадат възраженията на Zwicky и неговите сътрудници (вж. например [52]—[55]) срещу предполагаемото съществуване на купове от втори ред. Съгласно Zwicky регистрираните конфигурации от купове от галактики имат флуктуационен произход. А резултатите от нашата работа показват, че поне по една своя характеристика — населеността $\mathfrak{N}$ — куповете от галактики, принадлежащи към двете извадки, се отличават.

Допълнителен резултат е установяването на факта, че за отделни класи по разстояния населеностите на куповете от галактики могат да бъдат апроксимирани с логаритмично-логаритмично-нормално разпределение, а при големи $\mathfrak{N}$ и с Γ-разпределение.

$\Delta\mathfrak{M}$	N ζ_s	N ζ_n	N ζ_{s+n}	MD ζ_s	$\Delta\mathfrak{M}$	MD ζ_n	MD ζ_{s+n}	D ζ_s	D ζ_n	D ζ_{s+n}
0— 50	3,5	2,5	8,7	1,3	0— 20	1,8	1,9	0,3	11,4	9,6
50—100	2,2	5,4	9,2	4,9	20— 40	5,7	6,3	1,9	20,4	22,1
100—150	1,7	7,4	8,6	7,0	40— 60	8,7	9,9	4,0	23,2	28,4
150—200	1,5	7,3	7,8	7,5	60— 80	10,6	12,5	6,0	23,4	30,7
200—250	1,3	6,8	6,9	6,8	80—100	11,7	14,0	7,3	22,4	30,6
250—300	1,1	6,1	6,0	5,7	100—120	11,9	14,6	8,0	20,6	29,0
300—350	1,0	5,2	5,2	4,5	120—140	11,8	14,7	8,1	18,6	26,8
350—400	0,9	4,4	4,5	3,4	140—160	11,2	14,2	7,8	16,5	24,0
400—450	0,8	3,7	3,9	2,5	160—180	10,5	13,5	7,2	14,5	21,3
450—500	0,8	3,0	3,4	1,7	180—200	9,6	12,6	6,4	12,6	18,6
>500	6,2	11,2	19,8	3,7	200—220	8,7	11,6	5,5	10,8	16,0
					220—240	7,8	10,4	4,7	9,3	13,7
					240—260	6,9	9,4	4,0	7,9	11,6
					260—280	6,0	8,4	3,3	6,7	9,9
					280—300	5,2	7,4	2,7	5,7	8,3
					300—320	4,6	6,5	2,1	4,8	6,9
					320—340	3,9	5,7	1,7	4,0	5,8
					340—360	3,4	4,9	1,4	3,4	4,8
					360—380	2,9	4,2	1,1	2,8	4,0
					380—400	2,4	3,7	0,8	2,4	3,3
					400—420	2,1	3,2	0,6	2,0	2,7
					420—440	1,8	2,7	0,5	1,6	2,2
					440—460	1,5	2,3	0,4	1,4	1,8
					460—480	1,2	1,9	0,3	1,1	1,5
					480—500	1,0	1,7	0,2	1,0	1,2
						5,1	8,8	0,7	4,5	5,2

ЛИТЕРАТУРА

1. Калинков, М. Изв. на Секцията по астрономия, 5. БАН, 1972.
2. Zwicky, F., E. Herzog and P. Wild. Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies. Vol. 1, 1961, [Pasadena, Calif.: California Institute of Technology].
3. Zwicky, F. and E. Herzog. Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies. Vol. 2, 1963.
4. Zwicky, F and E. Herzog. Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies. Vol. 3, 1966.
5. Janko, J. Statističke Tabulky. Praha, 1958.
6. Большев, Л. Н., Н. В. Смирнов. Таблицы математической статистики. М., 1965.
7. Owen, D. B. Handbook of Statistical Tables. Palo Alto, London, 1952.
8. Sarhan, A. E., B. G. Greenberg. Contributions to Order Statistics. New York — London, 1962.
9. Калинков, М., Н. Спасова. Изв. на Секцията по астрономия, 5, БАН, 1972.
10. Neyman, J., E. L. Scott, C. D. Shane. ApJ, **117**, 92.
11. Neyman, J., E. L. Scott. Proc. Nat. Acad. Sci., **40** (1954), 873.
12. Neyman, J., E. L. Scott. AJ, **60** (1955), 33.
13. Layzer, D. AJ, **61** (1956), 383.
14. Tosuji, H., T. Kihara. Publ. Astron. Soc. Japan, **21**, (1969), 221.
15. Limber, D. N. ApJ, **117** (1953), 134.
16. Limber, B. N. ApJ, **119** (1954), 655.
17. Rubin, V. C. Proc. Nat. Acad. Sci., **40** (1954), 541.

Таблица 14

VD ζ_s	ζ_n	ζ_{s+n}	ED ζ_s	ζ_n	ζ_{s+n}	Σ' ζ_s	ζ_n	ζ_{s+n}	Σ'' ζ_s	ζ_n	ζ_{s+n}	Σ ζ_s	ζ_n	ζ_{s+n}
0,8	1,1	2,8	2,9	3,3	8,5	11,3	17,3	32,8	5,0	6,5	14,7	69,2	116,3	195,6
5,2	15,2	23,7	21,4	46,0	74,0	11,2	30,0	44,1	29,2	66,4	104,0	67,7	164,1	234,9
11,1	41,4	54,1	43,4	113,9	154,3	10,6	34,5	46,0	54,1	152,4	205,4	61,2	165,5	224,8
15,4	62,3	75,1	54,0	139,2	184,6	9,9	35,8	45,2	66,8	193,5	250,6	54,3	153,6	204,0
17,4	67,7	80,8	52,7	117,7	164,3	9,2	35,2	43,2	67,3	181,3	239,5	47,9	136,4	180,5
17,3	60,6	74,7	44,2	79,7	124,4	8,5	33,6	40,5	60,0	141,2	197,8	41,9	119,2	156,7
15,8	47,7	62,3	33,7	46,6	83,6	7,8	31,3	37,6	49,3	97,4	148,2	36,4	101,7	135,7
13,6	34,2	50,4	24,0	24,4	51,9	7,2	28,9	34,4	38,2	61,6	103,5	32,1	86,2	116,3
11,2	23,1	33,5	16,1	11,8	32,2	6,7	26,5	31,6	28,3	36,5	68,6	27,7	72,7	99,1
8,9	14,3	25,0	10,5	5,4	14,8	6,1	23,8	28,7	20,3	20,5	43,7	24,2	60,5	84,1
6,9	8,8	17,0	6,5	2,3	9,0	5,6	21,4	25,9	14,2	11,1	27,0	20,9	50,2	71,2
5,2	5,2	11,3	4,0	1,0	4,7	5,1	19,2	23,6	9,7	5,8	16,0	18,3	41,7	60,1
3,8	2,9	7,3	2,4	0,4	2,4	4,8	17,0	21,2	6,5	3,0	9,6	15,7	34,3	50,6
2,8	1,6	4,6	1,4	0,2	1,2	4,4	15,1	19,0	4,3	1,5	5,6	13,6	28,1	42,5
2,0	0,9	2,9	0,8	0,1	0,6	4,0	13,4	17,2	2,8	0,7	3,0	11,9	23,1	35,7
4,6	1,0	4,5	1,0		0,5	3,7	11,7	15,4	1,8	0,3	1,7	10,3	18,9	29,9
						3,4	10,3	13,7	1,2	0,2	1,0	8,8	15,4	25,1
						3,1	9,1	12,3	0,7	0,1	0,5	7,7	12,4	20,9
						2,9	7,9	11,1	0,5		0,3	6,6	10,2	17,5
						2,6	6,9	9,7	0,3		0,2	5,7	8,3	14,6
						2,4	6,1	8,7	0,2		0,1	4,9	6,8	12,2
						2,2	5,2	7,8	0,1			4,3	5,5	10,2
						2,0	4,6	6,9	0,1			3,7	4,4	8,4
						1,9	4,0	6,2	0,1			3,2	3,6	7,0
						1,7	3,4	5,5				2,7	2,9	5,8
						18,7	21,8	42,7				17,2	12,0	28,5

18. Rao, C. R. Linear Statistical Inference and its Applications. New York — London — Sydney, 1965.
19. Смирнов, Н. В., И. В. Дунин-Барковский. Курс теории вероятностей и математический статистики для технических приложений. М., 1965.
20. Hald, A. Statistical Theory with Engineering Applications. New York — London, 1952.
21. Kendall, M. G., A. Stuart. The Advanced Theory of Statistics, Vol. II. London, 1961.
22. Van der Waerden, B. L. Matematische Statistik. Berlin, 1957.
23. Калинков, М. (ще бъде публ.)
24. Wilson, E. B., M. M. Hilferty. Proc. Nat. Acad. Sci., **17** (1931), 694.
25. Таблицы вероятностных функций. I и II. М., 1970.
26. Kullback, S. Information Theory and Statistics. New York — London, 1958.
27. Lehman, E. L. Testing Statistical Hypotheses. New York — London, 1959.
28. Yates, F. J. Roy. Stat. Soc. (Suppl.), **1** (1934), 217.
29. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей. М., 1950.
30. Линник, Ю. В. Статистические задачи с мешающими параметрами. М., 1966.
31. Tukey, J. W. Ann. Math. Stat., **33** (1962), 1.
32. Pfanzagl, J. Allgemeine Methoden lehre der Statistik, Bd. I—II. Berlin, 1962.
33. Welch, B. L. Biometrika, **29** (1938), 350.
34. Welch, B. L. Ann. Math. Statist., **10** (1939), 58.
35. Welch, B. L. Biometrika, **34** (1947), 28.
36. Welch, B. L. Biometrika, **36**, (1949), 293.
37. Aspin, A. A. Biometrika, **36** (1949), 290.
38. Trickett, W. H., B. L. Welch, G. S. James. Biometrika, **43** (1956), 203.
39. Gayen, A. K. Biometrika, **36** (1949), 353.

40. The Design and Analysis on Industrial Experiments. Ed. by O. L. Davies. 1960. 2nd ed., Oliver and Boyd.
41. Таблицы функций распределения и плотностей распределения Стьюдента. М., 1960.
42. Амбарцумян, В. А. Некоторые замечания о кратных галактиках. Ереван, 1955.
43. Амбарцумян, В. А. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 9 (1956), 23.
44. Ambartsumian, V. A. Solvay Conference Report. Brussels, 1958, 241.
45. Ambartsumian, V. A. AJ, 66 (1961), 536.
46. Zonn, W. Acta Astronomica, 18 (1968), 273.
47. Zonn, W. Acta Astronomica, 18 (1968), 335.
48. Pearson, K. Tables of the Incomplete Γ-function. London, Biometrica, 1934.
49. Пагурова, В. И. Таблицы неполной Гамма-функции. М., 1963.
50. Крамер, Г. Математические методы статистики. М., 1948.
51. Гнеденко, Б. В., А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., 1949.
52. Zwicky, F. Morphological Astronomy. Berlin, 1957.
53. Zwicky, F., M. Rudnicky. ZfA, 64, (1966), 246.
54. Karpowicz, M. ZfA, 66 (1967), 301.
55. Karpowicz, M. ZfA, 67 (1967), 139.

Постъпила на 26. VI. 1971 г.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ СВЕРХСКОПЛЕНИЙ ГАЛАКТИК ВБЛИЗИ СЕВЕРНОГО ГАЛАКТИЧЕСКОГО ПОЛЮСА

М. Калинков

(Резюме)

Проверяется нулевая гипотеза на основе изоплетов [1]: обе выборки (первая — населенности скоплений галактик, центры которых расположены в областях, дважды превышающих среднюю поверхностную плотность скоплений галактик во всей исследуемой области; вторая — относящаяся к областям с меньшей поверхностной плотностью) принадлежат к одной и той же генеральной совокупности.

При этом применялись: метод медиан, критерий χ^2, критерий Смирнова. Непосредственно сравнивались средние значения. Произведена трансформация в лог-нормальном распределении и в лог-лог-нормальном распределении, которые снова сравнивались со средними величинами.

Все примененные методы показывают, что нулевую гипотезу следует отвергнуть с весьма большой вероятностью.

Сделана попытка применения гамма-распределения.

Выводы из настоящей работы можно рассматривать как доказательства существования скоплений скоплений галактик (сверхскоплений галактик или скоплений второго порядка).

EVIDENCE FOR THE EXISTENCE OF CLUSTERS OF CLUSTERS OF GALAXIES AROUND THE NORTH GALACTIC POLE

M. Kalinkov

(Summary)

The null hypothesis is tested on the basis of the isoplet map in [1]: the two samples (the first — the population of clusters of galaxies, whose centres are located in areas exceeding twice the average surface density of clusters of galaxies for the whole region studied, and the second — for areas having a smaller surface density) which are referred to the same statistical population.

The method of the medians, the χ^2-criterion and Smirnov's criterion have been applied. The mean values have been directly compared. A transformation in a lognormal distribution has been conducted, as well as a loglognormal distribution. The mean values have again been compared.

All methods applied show that the null hypothesis should be rejected with an exceptionally high probability.

An attempt has been made to use the gamma-distribution.

The conclusions drawn from this investigation may be viewed as evidence for the existence of clusters of clusters of galaxies or clusters of second order.