БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА СЕКЦИЯТА ПО АСТРОНОМИЯ
BULLETIN OF THE SECTION OF ASTRONOMY
Том (Vol.) VI, 1973

НОМОГРАМИ ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ ХОРИЗОНТАЛНИТЕ КООРДИНАТИ НА ИЗКУСТВЕНИТЕ СПЪТНИЦИ НА ЗЕМЯТА

Димитър Методиев

Често при наблюдения на изкуствени спътници на Земята се използват ефемериди за подспътникови точки. В тези ефемериди обикновено се дават географската широчина φ_s и географската дължина λ_s на подспътниковата точка и височината на спътника над земната повърхност през равни интервали в аргумента на широчината му. Използването на такива ефемериди е свързано с изчисления на хоризонталните координати на спътника относно наблюдателната станция. Тъй като в повечето случаи при определяне на хоризонталните координати A, h не е необходима особено голяма точност, то изчислението най-удобно и бързо може да стане с помощта на номограми.

В тази статия се разглежда построяването на номограми за трансформиране координатите на подспътниковите точки в хоризонтални, анализира се тяхната точност и се описва начинът за работа с тях.

Хоризонталните координати на спътника се определят по формулите

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{cotg} A = \frac{2\sin\Delta\varphi + \sin 2\varphi_0 \operatorname{tg}\frac{\Delta\lambda}{2}\sin\Delta\lambda}{\sin\Delta\lambda\sin 2\varphi_0},$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg} h = \operatorname{cotg}\psi - \frac{R}{(R+H)\sin\psi},$$

$$\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_0, \quad \Delta\lambda = \lambda_s - \lambda_0,$$

където φ_0 е географската широчина на станцията;
λ_0 — географската дължина на станцията;
R — радиусът на Земята, която се апроксимира със сфера;
H — височината на спътника над земната повърхност;

$$\text{(3)} \qquad \cos\psi = \cos\varphi_s\cos\varphi_0 + \sin\varphi_s\sin\varphi_0\cos\Delta\lambda.$$

Тъй като непосредственото номографиране на (1) и (2) е неудобно, тези уравнения се привеждат в следния удобен за номографиране вид:

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{cotg} A\sin\Delta\lambda - (1-\cos\Delta\lambda) - 2\frac{\sin\Delta\varphi}{\sin 2\varphi_0} = 0,$$

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tg} h \sin \psi + \frac{R}{R+H} - \cos \psi = 0.$$

В (5) величината ψ се определя с помощта на (3). Това значително усложнява построяването на номограмата, поради което за ψ е построена отделна номограма по уравнението

$$\text{(6)} \qquad -2 \sin^2 \frac{\psi}{2} + 2 \sin^2 \frac{\Delta\lambda}{2} \sin \varphi_0 \sin \varphi_s + 1 - \cos(\varphi_s - \varphi_0) = 0,$$

получено от преобразуването на (3).

1. МЕТОД НА НОМОГРАФИРАНЕТО

За уравненията (4), (5) и (6), които са сведени към каноничната форма на Коши, са построени номограми с помощта на изравнени точки [1].

Известно е, че границите, в които се изменят променливите величини, оказват съществено влияние за подобряване или за влошаване качествата на номограмата. За това с оглед разположението на наблюдателните станции за променливата φ_0 е приет интервалът $0° < \varphi_0 \leqq 60°$. Интервалите, в които се изменят $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ (от -30 до $+30°$), се определят от предположението, че ψ се изменя в интервала $0° < \psi \leqq 30°$. Този интервал е определен, като са взети под внимание рефракцията и максималната височина, на която наблюдателят наблюдава спътника (около 4000 km).

За останалите величини, влизащи в уравненията, са взети следните интервали:

$0{,}2 \leqq H \leqq 4{,}0$ (в хиляди километри);

$R = 6{,}378$ (постоянна величина);

$0° < \varphi_s < 90°$.

За уравнение (4) са построени две съставни номограми с изравнени точки. Първата се използва, когато $E \leqq \Delta\varphi \leqq 30°$* и $0 < \Delta\lambda \leqq 30°$ или $-30° \leqq \Delta\lambda < 0$, а втората — когато $-30° \leqq \Delta\varphi \leqq E$ и $0 < \Delta\lambda \leqq 30°$ или $-30° \leqq \Delta\lambda < 0$.

За построяването на първата номограма, за която е достатъчно да разгледаме случая $E \leqq \Delta\varphi \leqq 30°$ и $\Delta\lambda > 0°$, разлагаме уравнение (4) на следните две уравнения:

$$\text{(7)} \qquad \frac{1}{6} \operatorname{cotg} A(-\sin \Delta\lambda) + m + \frac{1}{6}(1 - \cos \Delta\lambda) = 0,$$

$$\text{(8)} \qquad m = \frac{1}{3} \frac{\sin \Delta\varphi}{\sin 2\varphi_0}.$$

За всяко от тези уравнения построяваме номограми с изравнени точки, които свързваме чрез нямата скала m.

За уравнение (7) уравненията на скалите са:

$$A: \quad x = 0, \qquad y = \frac{1}{6} \operatorname{cotg} A;$$

$$m: \quad x = 2, \qquad y = m;$$

$$\Delta\lambda: \quad x = \frac{2}{1 - \sin \Delta\lambda}, \quad y = -\frac{1 - \cos \Delta\lambda}{6(1 - \sin \Delta\lambda)}.$$

---

* Функцията $E = f(\Delta\lambda, \varphi_0)$ взема стойности в интервала $-4 < E < 0°$ в зависимост от $\Delta\lambda$ и φ_0. Големината на E се определя за всеки конкретен случай на номограмата.

За уравнение (8) уравненията на скалите са:

$$m: \quad x=0, \qquad y=m;$$

$$\Delta\varphi: \quad x=-2, \qquad y=-2\sin\Delta\varphi;$$

$$\varphi_0: \quad x=\frac{-2}{1+6\sin 2\varphi_0}, \quad y=0.$$

Поради това, че азимутът A се определя чрез функцията cotg, на която стойностите растат много бързо, когато аргументът клони към нула, чрез тази съставна номограма се определя A от 2 до 25°. За намиране на A от 25 до 90° е съставена също съставна номограма с изравнени точки. В този случай уравнение (4) се разлага на следните две уравнения:

$$2\operatorname{cotg} A(-\sin\Delta\lambda)+m+2(1-\cos\Delta\lambda)=0, \tag{9}$$

$$m=4\frac{\sin\Delta\varphi}{\sin 2\varphi_0}. \tag{10}$$

За уравнение (9) уравненията на скалите са:

$$A: \quad x=0, \qquad y=2\operatorname{cotg} A;$$

$$m: \quad x=2, \qquad y=m;$$

$$\Delta\lambda: \quad x=\frac{2}{1-\sin\Delta\lambda}, \qquad y=-\frac{2(1-\cos\Delta\lambda)}{1-\sin\Delta\lambda},$$

а за уравнение (10) те са:

$$m: \quad x=0, \qquad y=m;$$

$$\Delta\varphi: \quad x=-2, \qquad y=-2\sin\Delta\varphi;$$

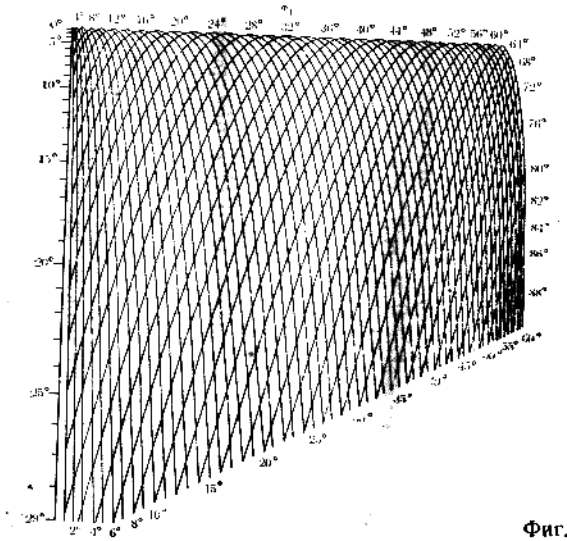
$$\varphi_0: \quad x=-\frac{-4}{2+\sin 2\varphi_0}, \quad y=0.$$

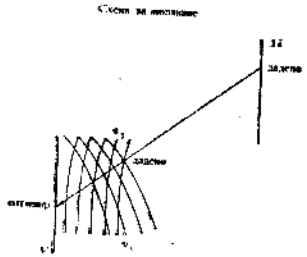
Тези съставни номограми са построени заедно, тъй като направленията на някои съставящи скали съвпадат.

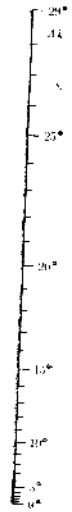
При втората номограма е достатъчно да разгледаме случая, когато $-30°\leqq\Delta\varphi\leqq E$ и $\Delta\lambda>0$, за да обхванем и двете възможности. Когато $\Delta\varphi$ взема отрицателни стойности ($\sin\Delta\varphi<0$), отрицателен е и $\operatorname{cotg} A$. В такъв случай на (4) можем да дадем вида

$$\operatorname{cotg} A(-\sin\Delta\lambda)+2\frac{\sin\Delta\varphi}{\sin 2\varphi_0}-(1-\cos\Delta\lambda)=0. \tag{11}$$

Това уравнение се различава от (4) само по знака на събираемото $1-\cos\Delta\lambda$. Следователно в номограмата на уравнение (11) само скалата $\Delta\lambda$ се различава по положение от скалата $\Delta\lambda$ в номограмата на уравнение (4). Тогава двете съставни номограми (на уравнения (4) и (11)) могат да се построят заедно, защото скалите A, m, $\Delta\varphi$ и φ_0 съвпадат (фиг. 1).







Фиг. 1

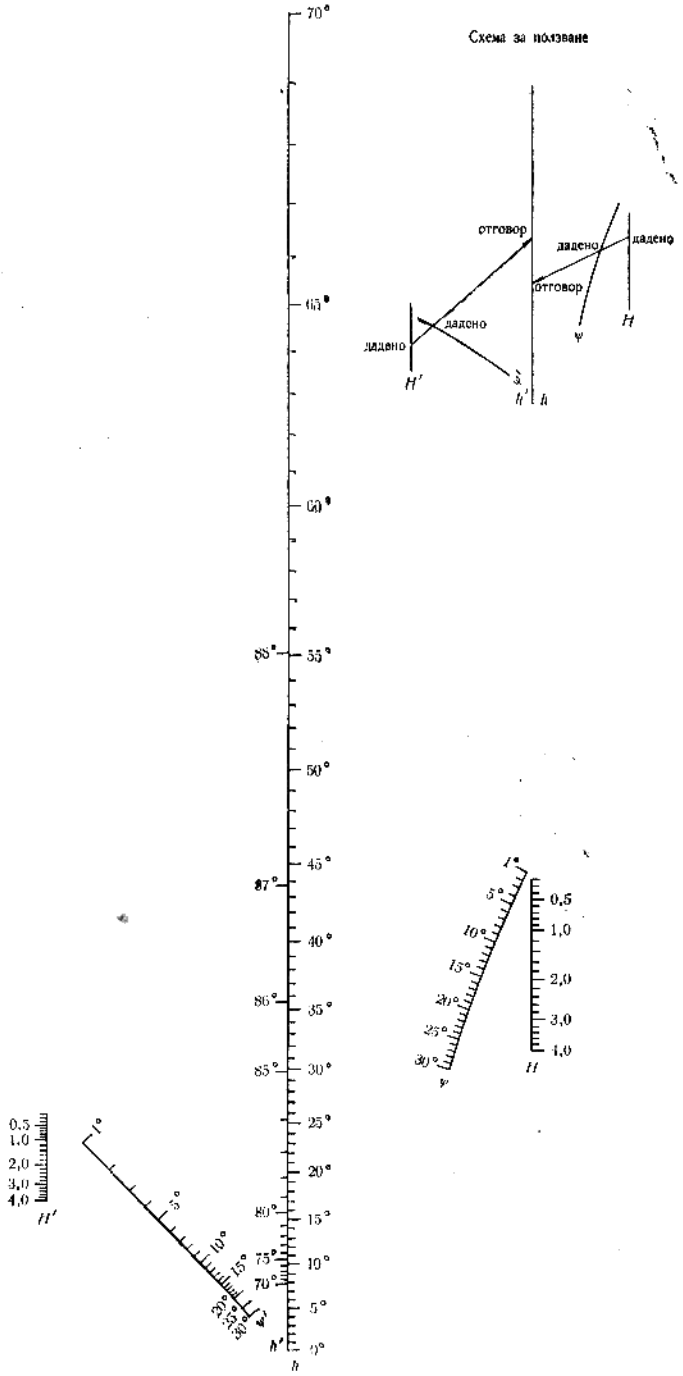
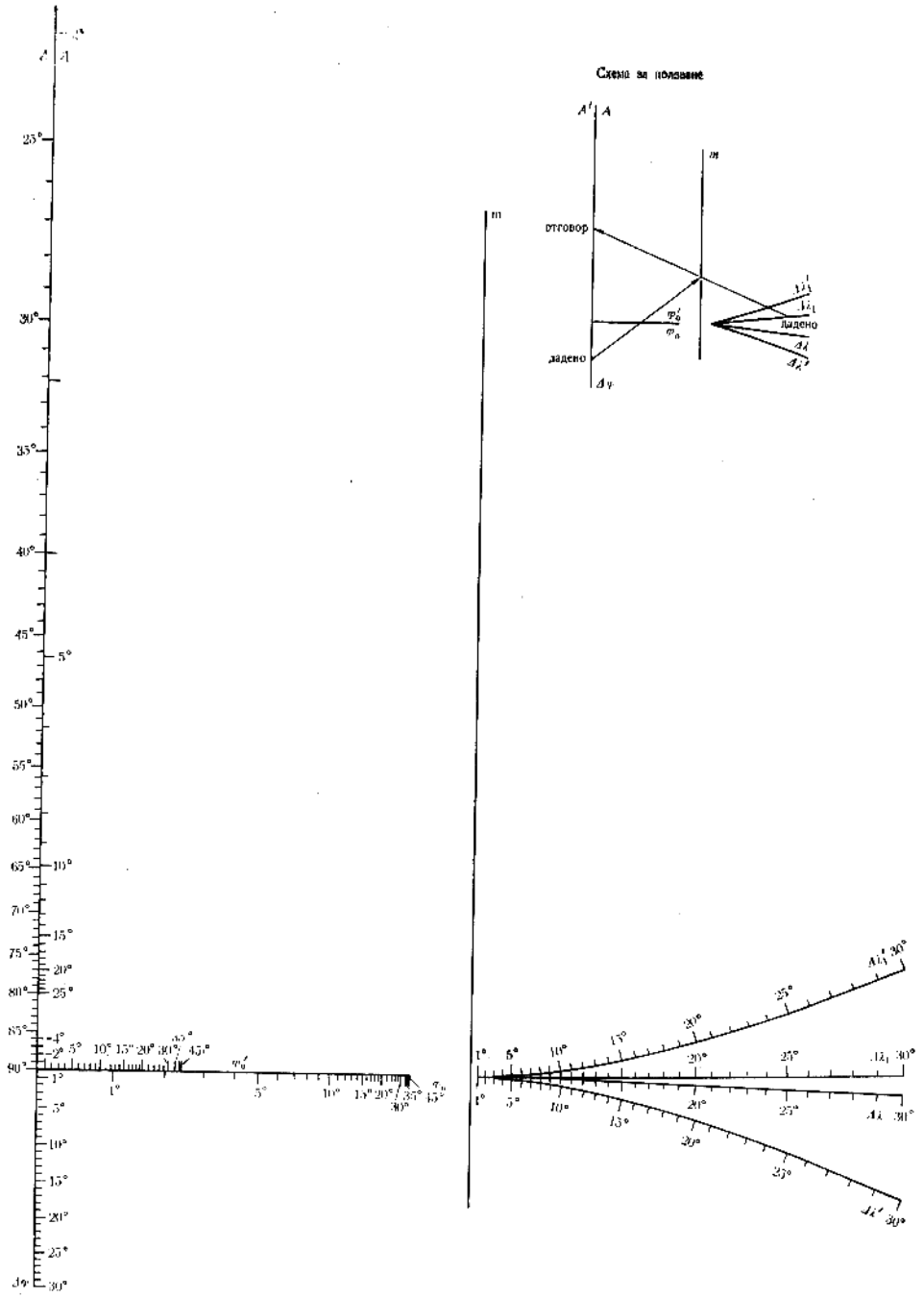


Схема за ползване
отговор
дадено
дадено
отговор
дадено
дадено
H'
H
h'
h
ψ
70°
65°
60°
55°
50°
45°
40°
35°
30°
25°
20°
15°
10°
5°
0°
88°
87°
86°
85°
80°
75°
70°
0,5
1,0
2,0
3,0
4,0
1°
5°
10°
15°
20°
25°
30°

Фиг. 2



Фиг. 3

За уравнение (5) е построена номограма с изравнени точки с помощта на следните уравнения на скалите:

$$h: \quad x=0, \qquad y=2\,\mathrm{tg}\,h;$$

$$H: \quad x=1, \qquad y=\frac{2R}{R+H};$$

$$\psi: \quad x=\frac{1}{1+\sin\psi}, \; y=\frac{2\cos\psi}{1+\sin\psi}.$$

Поради това, че височината h се определя чрез функцията tg, на която стойностите растат много бързо, когато аргументът клони към 90°, чрез тази номограма се определя височината от 0 до 70°. За намиране на височината от 70 до 90° е построена номограма, като са използвани уравненията

$$h: \quad x=0, \qquad y=\frac{1}{10}\,\mathrm{tg}\,h;$$

$$H: \quad x=-1, \qquad y=\frac{R}{R+H};$$

$$\psi: \quad x=-\frac{1}{1+10\sin\psi}, \; y=\frac{\cos\psi}{1+\sin\psi}.$$

Тези две номограми са построени заедно, тъй като скалата на величината h ги обединява (фиг. 2).

За уравнение (6) е построена номограма с изравнени точки с бинерно поле (фиг. 3). След преработване на това уравнение намираме уравненията на скалите и бинерното поле:

$$\psi: \quad x=0, \qquad y=-40\sin^2\frac{\psi}{2};$$

$$\Delta\lambda: \quad x=5, \qquad y=40\sin^2\frac{\Delta\lambda}{2};$$

$$\varphi_s, \varphi_0: \quad x=\frac{5\sin\varphi_s\sin\varphi_0}{1+\sin\varphi_s\sin\varphi_0}, \; y=-\frac{20-20\cos(\varphi_s-\varphi_0)}{1+\sin\varphi_s\sin\varphi_0}.$$

2. ПОЛЗВАНЕ НА НОМОГРАМИТЕ

2.1. Номограма за азимута A

Когато за $\Delta\varphi$ е дадена стойност от интервала $E \leqq \Delta\varphi \leqq 30°$, от номограмата се използват скалите $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda$ или $\Delta\lambda'$ независимо от знака на $\Delta\lambda$. Когато $\Delta\varphi$ е от интервала $-30° \leqq \Delta\varphi \leqq E$, се използват скалите $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda_1$ или $\Delta\lambda'_1$. Трябва да се има пред вид, че и в двата случая скалите $\Delta\varphi$, φ_0, φ'_0, m, A и A' са едни и същи.

По дадени $\Delta\varphi$, φ_0 и $\Delta\lambda$ намирането на азимута по номограмата на уравнение (4) (фиг. 1) става по следния начин: съединяваме с права точките, които отговарят на $\Delta\varphi$ и φ_0 по номограмата, и отбелязваме пресечната точка със скалата m; след това съединяваме с права точките,

които отговарят на $\Delta\lambda$ и m, и определяме точката, в която тя пресича скалата A; стойността на A, която отговаря на тази точка, е търсената стойност.

Когато за определянето на A се използват скалите $\Delta\varphi$, φ_0 и $\Delta\lambda$ или $\Delta\lambda_1$, може правата, прекарана през съответните точки на скалите m и $\Delta\lambda$ или $\Delta\lambda_1$, да пресече продължението на скалата A в посока на нарастването на азимута. В такива случаи данните се поставят отново върху скалите $\Delta\varphi$, φ_0' и $\Delta\lambda'$ или $\Delta\lambda_1'$ и отчитането става по скалата A'.

За определянето на A при $-4° \leqq \Delta\varphi \leqq -1°$ се използват скалите $\Delta\varphi$, φ_0' и $\Delta\lambda'$. Ако правата, прекарана през съответните точки на скалите m и $\Delta\lambda'$, пресича продължението на скалата A', данните се поставят отново върху скалите $\Delta\varphi$, φ_0' и $\Delta\lambda_1'$, като за $\Delta\varphi$ се поставя стойност от -1 до $-4°$.

Когато се определят точки върху скалата φ_0, отговарящи на стойности, по-големи от 45°, трябва да се има пред вид, че в номографираното уравнение φ_0 фигурира във функцията sin като удвоен ъгъл, т. е. $\sin 2\varphi_0$. Затова при $\varphi_0 > 45°$ върху скалата се поставя допълнителният ъгъл до 90°.

Намерената стойност на азимута по номограмата е между 0 и 90°. Да означим тази стойност с A^*. Истинската стойност на азимута A се определя, като се ръководим от следните условия:

ако $\Delta\lambda > 0°$ и $E \leqq \Delta\varphi \leqq 30°$, $A = A^*$;
ако $\Delta\lambda > 0°$ и $-30° \leqq \Delta\varphi \leqq E$, $A = 180° - A^*$;
ако $\Delta\lambda < 0°$ и $-30° \leqq \Delta\varphi \leqq E$, $A = 180° + A^*$;
ако $\Delta\lambda < 0°$ и $E \leqq \Delta\varphi \leqq 30°$, $A = 360° - A^*$.

2.2. Номограма за височината h

По дадени H и ψ ($R = \text{const} = 6{,}378$) намирането на височината h по номограмата на уравнение (5) (фиг. 2) става по следния начин: съединяваме с права точките, които отговарят на H и ψ по номограмата на уравнение (5), и отбелязваме пресечната точка със скалата h; стойността на h, която отговаря на тази точка, е търсената стойност.

Когато се определят точките, отговарящи на определени стойности по скалите H и ψ, стойността на h се отчита по скалата h, а когато се поставят стойности на скалите H' и ψ', h се отчита по скалата h'.

2.3. Номограма за ъгъла ψ

По дадени φ_0, φ_s и $\Delta\lambda$ намирането на ъгъл ψ по номограмата на уравнение (6) става по следния начин: върху скалата $\Delta\lambda$ определяме точката, която съответствува на дадената стойност за $\Delta\lambda$; определяме точката от бинерното поле, която съответствува на φ_0 и φ_s; правата, определена от тези две точки, пресича скалата ψ в точка, която отговаря на стойността на търсения ъгъл ψ.

3. ТОЧНОСТ НА НОМОГРАМИТЕ

Точността на дадена номограма зависи от положението на прекарваната права относно скалите ѝ и от определянето на пресечните точки.

Грешката в определянето на h зависи от точността на номограмите за ψ и h. Както е показано в табл. 1, тя не надвишава 2°. Подобна е и точността при определянето на азимута A (табл. 2).

Таблица 1

Дадено				ψ		h		Грешка m_h
φ_0	φ_S	$\Delta\lambda$	H	по номограма	по формула	по номограма	по формула	
3°	5°	24°	3,2	3°00′	2°30′	81°30′	82°32′	1°02′
31°	41°	18°	3,0	14°35′	14°27′	48°50′	47°19′	1°21′
2°	3°	19°	4,0	2°00′	1°18′	85°10′	86°38′	1°28′
54°	73°	8°	0,9	20°00′	20°17′	11°40′	10°01′	1°39′
24°	38°	20°	0,7	17°10′	17°15′	12°00′	10°15′	1°45′
2°	30°	2°	1,4	28°10′	27°59′	9°00′	7°39′	1°21′
2°	20°	2°	2,0	17°50′	18°01′	30°40′	32°26′	1°46′
1°	5°	2°	1,8	3°30′	4°03′	74°30′	74°20′	0°10′
30°	30°	30°	1,4	15°00′	14°53′	30°00′	29°29′	0°21′
30°	50°	30°	1,6	27°30′	27°19′	11°30′	10°51′	0°39′
1°	30°	1°	2,2	28°55′	29°00′	16°00′	15°08′	0°52′

Таблица 2

Дадено			A		Грешка m_A
φ_0	$\Delta\varphi$	$\Delta\lambda$	по номограма	по формула	
10°	30°	5°	1°30′	1°41′	0°11
30°	15°	5°	8°00′	8°15′	0°15′
40°	25°	25°	23°30′	23°57′	0°27′
5°	—2°	20°	45°30′	45°01′	0°29′
30°	—3°	30°	88°00′	88°30′	0°30′
20°	5°	15°	39°20′	40°18′	0°58′
45°	—1°	30°	78°00′	78°48′	0°48′
45°	10°	30°	45°50′	46°54′	1°04′
10°	—4°	10°	22°30′	23°50′	1°20′
5°	—3°	30°	45°50′	47°26′	1°36′
5°	—1°	8°	34°20′	35°58′	1°38′
30°	—2°	2°	21°40′	23°34′	1°54′

Размерът на работните номограми е 22×32 cm.

Считам за приятно задължение сърдечно да благодаря на В. Шкодров за постоянното му внимание и за предварителните обсъждания на тази работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пентковский, М. В. Номография. М., 1949.

Постъпила на 14. V. 1971 г.

НОМОГРАММЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ КООРДИНАТ ИСЗ

Д. Методиев

(Резюме)

Построены номограммы для трансформирования координат подспутниковых точек в горизонтальные координаты и анализирована их точность. Описывается способ работы с номограммами.

NOMOGRAMS TO CALCULATE HORIZONTAL COORDINATES OF SATELLITES

D. Metodiev

(Summary)

Nomograms have been plotted for the transformation of the coordinates of the subsatellite points in horizontal coordinates and their accuracy has been analysed. The manner of operation with the nomograms is described.