БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА СЕКЦИЯТА ПО АСТРОНОМИЯ
BULLETIN OF THE SECTION OF ASTRONOMY
Том (Vol.) VI, 1973

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Владимир Шкодров

Иногда, при решении некоторых задач в сферической системе координат, приходится вычислять поверхностные интегралы по единичной сфере σ, подынтегральная функция которых является либо произведением сферических функций, либо произведением производных из сферических функций. Таких интегралов часто можно привести до нескольких общих интегральных форм, решения которых рассматриваются в настоящей работе.

Рассмотрим следующие поверхностные интегралы по единичной сфере:

$$\int_\sigma P_n(\psi)\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_i(X_j|\theta)d\sigma, \tag{1}$$

$$\int_\sigma P_n(\psi)|\theta\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_i(X_j|\theta)d\sigma, \tag{2}$$

$$\int_\sigma \frac{P_n(\psi)}{(1-\mu^2)\frac{\beta}{2}}\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_i(X_j|\lambda)d\sigma, \tag{3}$$

$$\int_\sigma \frac{P_n(\psi)|\lambda}{(1-\mu^2)\frac{\beta}{2}}\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_j(X_j|\lambda)d\sigma, \tag{4}$$

где

$$\prod_{i=0}^{\alpha} X_j = 1\,.\,X_1\,.\,X_2\ldots X_\alpha, \tag{5}$$

$$\prod_{j=0}^{\beta}(X_j|\alpha) = 1\,.\,X_1|d\,.\,X_2|d\ldots X_\beta|d, \tag{6}$$

X_i, X_j — некоторые сферические функции; $P_n(\psi)$ — полином Лежандра, причем $\psi=\psi(\mu, \lambda, \mu', \lambda')$. С вертикальными черточками в (6) обозначено дифференцирование по некоторой переменной.

Чтобы получить необходимые преобразования интегралов (1)—(4), выражаем полином Лежандра $P_n(\psi)$ следующим образом:

$$P_n(\psi)=\sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\mu')[C^{nm}(\mu, \lambda)\cos m\lambda'+S^{nm}(\mu, \lambda)\sin m\lambda'], \tag{7}$$

где

$$\begin{bmatrix} C^{nm}(\mu, \lambda) \\ S^{nm}(\mu, \lambda) \end{bmatrix}=h_{nm}P_{nm}(\mu)\begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

В (8) обозначено

$$h_{nm}=\frac{2(n-m)!}{\delta_m(n+m)!}, \quad \delta_m=\begin{cases} 1, & m\neq 0, \\ 2, & m=0. \end{cases} \tag{9}$$

Из (1)—(4) и (7) после некоторых преобразований получаем

$$\int_\sigma P_n(\psi)\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_i(X_j|\theta)d\sigma=Y_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu, \lambda, \lambda', \mu'), \tag{10}$$

$$\int_\sigma P_n(\psi)|\theta\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_i(X_j\,\theta)d\sigma=Y_{nm|\theta}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu, \lambda, \mu', \lambda'), \tag{11}$$

$$\int_\sigma \frac{P_n(\psi)}{(1-\mu^2)\frac{\beta}{2}}\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_i(X_j|\lambda)d\sigma=Y_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu, \lambda, \mu', \lambda'), \tag{12}$$

$$\int_\sigma \frac{P_n(\psi)|\theta}{(1-\mu^2)\frac{\beta}{2}}\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_i(X_j|\lambda)d\sigma=Y_{nm|\lambda}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu, \lambda, \mu', \lambda'), \tag{13}$$

где

$$Y_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu, \lambda, \mu', \lambda')=\sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\mu')[\mathfrak{G}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu, \lambda)\cos m\lambda'+\mathfrak{M}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu, \lambda)\sin m\lambda'], \tag{14}$$

$$Y_{nm|\theta}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu, \lambda, \mu', \lambda')=\sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\mu')[\mathfrak{G}_{nm|\theta}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu, \lambda)\cos m\lambda'+\mathfrak{M}_{nm|\theta}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu, \lambda)\sin m\lambda'], \tag{15}$$

$$Y_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu, \lambda, \mu', \lambda')=\sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\mu')[\mathfrak{G}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu, \lambda)\cos m\lambda'+\mathfrak{M}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu, \lambda)\sin m\lambda'], \tag{16}$$

$$Y_{nm|\lambda}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu, \lambda, \mu', \lambda')=\sum_{m=0}^{n} P_{nm}(\mu')[\mathfrak{G}_{nm|\lambda}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu, \lambda)\cos m\lambda'+\mathfrak{M}_{nm|\lambda}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu, \lambda)\sin m\lambda'], \tag{17}$$

причем

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \\ \mathfrak{M}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} = \int_\sigma \begin{bmatrix} C^{nm}(\mu,\lambda) \\ S^{nm}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} \prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_j(X_j|\theta)d\sigma, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{nm|\theta}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \\ \mathfrak{M}_{nm|\theta}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} = \int_\sigma \begin{bmatrix} C^{nm}(\mu,\lambda)|\theta \\ S^{nm}(\mu,\lambda)|\theta \end{bmatrix} \prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_i(X_j|\theta)d\sigma, \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu,\lambda) \\ \mathfrak{M}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} = \int_\sigma \begin{bmatrix} C^{nm}(\mu,\lambda) \\ S^{nm}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} \sin^{-\beta/2}\theta \prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_i(X_j|\lambda)d\sigma, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{nm|\lambda}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu,\lambda) \\ \mathfrak{M}_{nm|\lambda}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} = \int_\sigma \begin{bmatrix} C^{nm}(\mu,\lambda)|\lambda \\ S^{nm}(\mu,\lambda)|\lambda \end{bmatrix} \sin^{-\beta/2}\theta \prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta} X_i(X_j|\lambda)d\sigma. \tag{21}$$

Выражения типа (14)—(17) являются очень удобными для решения некоторых задач, когда приходится сравнивать коэффициенты перед одинаковыми степенями некоторого малого параметра.

Вычисление коэффициентов $\mathfrak{G}_{nm}$ и $\mathfrak{M}_{nm}$ проводим с помощью полученных нами формул в работах [1] и [2]. Для этой цели выражаем

$$\begin{aligned} C^{nm}(\mu,\lambda) &= C_1^{nm}(\mu)C_2^{nm}(\lambda), \\ S^{nm}(\mu,\lambda) &= S_1^{nm}(\mu)S_2^{nm}(\lambda), \\ X_i &= \sum_{n_i,m_i} P_{n_i m_i}(\mu)\Lambda_{n_i m_i}(\lambda), \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\Lambda_{n_j m_j} = a_{n_i m_i}\cos m_i\lambda + b_{n_i m_i}\sin m_i\lambda, \tag{23}$$

$a_{n_i m_i}$, $b_{n_i m_i}$ — некоторые известные коэффициенты.

Таким образом из (18)—(21) с помощью (22) получаем

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \\ \mathfrak{M}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} = h_{nm} \sum_{n_i m_i n_j m_j} \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} P_{\alpha\alpha_1\beta}^{(1)}(\mu)D_{\alpha\alpha_1\beta}(\lambda)\begin{pmatrix}\cos m\lambda \\ \sin m\lambda\end{pmatrix} d\mu d\lambda, \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{nm|\theta}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \\ \mathfrak{M}_{nm|\theta}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} = h_{nm} \sum_{n_i m_i n_j m_j} \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} P_{\alpha\alpha_1\beta}^{(2)}(\mu)D_{\alpha\alpha_1\beta}(\lambda)\begin{pmatrix}\cos m\lambda \\ \sin m\lambda\end{pmatrix} d\mu d\lambda, \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{nm}^{\alpha\beta\alpha_1|\lambda}(\mu,\lambda) \\ \mathfrak{M}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} = h_{n_i m_i} \sum_{n_i m_i n_j m_j} \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} P_{\alpha\alpha_1\beta}^{(3)}(\mu)\tilde{D}_{\alpha\alpha_1\beta}(\lambda)\begin{pmatrix}\cos m\lambda \\ \sin m\lambda\end{pmatrix} d\mu d\lambda, \tag{26}$$

причем

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{nm|\lambda}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu,\lambda) &= -m\mathfrak{M}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta}(\mu,\lambda), \\ \mathfrak{M}_{nm|\lambda}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu,\lambda) &= m\mathfrak{G}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta}(\mu,\lambda). \end{aligned} \tag{27}$$

В (24)—(26) обозначено

$$P^{(1)}_{\alpha\alpha_1\beta}(\mu)=\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha+1}\prod_{j=1}^{\beta}P_{n_im_i}(\mu)P_{n_jm_j}(\mu)|\theta,$$

(28) $$P^{(2)}_{\alpha\alpha_1\beta}(\mu)=\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta+1}P_{n_im_i}(\mu)P_{n_jm_j}(\mu)|\theta,$$

$$P^{(3)}_{\alpha\alpha_1\beta}(\mu)=\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta+1}(1-\mu)^{-\beta/2}P_{n_im_i}(\mu)P_{n_jm_j}(\mu),$$

где индексы n и m заменены индексами $n_{\alpha+1}, m_{\alpha+1}$ для $P_{nm}(\mu)$ и $n_{\beta+1}, m_{\beta+1}$ для $P_{nm}(\mu)|\theta$. Кроме того обозначено

(29) $$D_{\alpha\alpha_1\beta}(\lambda)=\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta}\Lambda_{n_im_i}\Lambda_{n_jm_j},$$

$$\widetilde{D}_{\alpha\alpha_1\beta}(\lambda)=\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\prod_{j=1}^{\beta}\Lambda_{n_im_i}\Lambda_{n_jm_j}|\lambda.$$

Чтобы вычислить интегралы (24)—(26), выражаем все подынтегральные величины с помощью формул, полученных в [1], [2]. Для этой цели на основании (13) [2] пишем

(30) $$\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha+1}P_{n_im_i}(\mu)$$

$$=\sum_{(i,l_i,\alpha_1,\alpha+1)}F(n_{\alpha_1},\ldots,n_{\alpha+1},m_{\alpha_1},\ldots,m_{\alpha+1},l_{\alpha_1},\ldots,l_\alpha)P_{l_\alpha,m_{\alpha_1}+\cdots+m_{\alpha+1}}(\mu),$$

где

(31) $$\sum_{(i,l_i,\alpha_1,\alpha+1)}=\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\left(\sum_{l_i=|l_{i-1}-n_{i+1}|}^{l_{i-1}+n_{i+1}}\right),\quad l_{\alpha_1-1}=n_{\alpha_1}.$$

Коэффициенты $F(n_{\alpha_1},\ldots,n_{\alpha+1},m_{\alpha_1},\ldots,m_{\alpha+1},l_{\alpha_1},\ldots,l_\alpha)$ выражаются через коэффициенты Клебша—Гордона [1], [2].

На основании (29) [2] получаем

(32) $$\prod_{j=1}^{\beta}P_{n_jm_j}(\mu)|\theta=\sum_{\substack{(\tau,\vartheta,s,q_\vartheta,\\ l_s,1,\beta,l')}}F(\underline{p},q,\beta,\tau)\prod_{\vartheta=1}^{\tau}\prod_{s=\tau+1}^{\beta}K_{n_{q_\vartheta}m_{q_\vartheta}}K_{m_{\underline{p}_s}}P_{l',\sum_{j=1}^{\beta}m_j+\beta-2\tau}(\mu),$$

где

(33) $$F(\underline{p},q,\beta,\tau)=F(n_{q_1},\ldots,n_{q_\tau},m_{q_1}-1,\ldots,m_{q_\tau}-1,l_1,\ldots,l_{\tau-1})$$
$$\times F(l_{\tau-1},l_{\beta-1},l',m_{q_1}+\cdots+m_{q_\tau}-\tau,m_{\underline{p}_{\tau+1}}+\cdots+m_{\underline{p}_\beta}+\beta-\tau)$$
$$\times F(n_{\underline{p}_{\tau+1}},\ldots,n_{\underline{p}_\beta},\ldots,m_{\underline{p}_{\tau+1}}+1,\ldots,m_{\underline{p}_\beta}+1,l_{\tau+1},\ldots,l_{\beta-1}),$$

$K_{n_{q_\vartheta}, m_{q_\vartheta}}$, $K_{m_{p_s}}$ — известные коэффициенты, причем индекс $\underline{p}$ принимает в интервале $[1, \beta]$ все значения, которые не принимает q. Кроме того, обозначено

$$\sum_{\substack{(\tau,\vartheta,s,q_\vartheta,\\ l_s,1,\beta,l')}} = \sum_{l'=|l_{\beta-1}-l_{\tau-1}|}^{l_{\beta-1}+l_{\tau-1}} \sum_{(\tau,\vartheta,q_\vartheta,1,\beta)} \sum_{(\beta,l_\beta,1,\tau+1)} \sum_{(s,l_s,\tau+1,\beta-1)}, \tag{34}$$

причем

$$\sum_{(\tau,\vartheta,q_\vartheta,1,\beta)} = \sum_{\tau=0}^{\beta} \prod_{\vartheta=1}^{\tau} \left(\sum_{q_\vartheta=q_{\vartheta-1}+1}^{\beta+\vartheta-\tau} \right), \quad q_0=0. \tag{35}$$

Из (30) и (32) получаем

$$\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha+1} \prod_{j=1}^{\beta} P_{n_i m_i}(\mu) P_{n_j m_j}(\mu) \theta \tag{36}$$

$$= \sum_{\substack{(i,l_i,\alpha_1,\alpha+1,\\ \tau,\vartheta,s,q_\vartheta,l_s,\\ 1,\beta,l',l'')}} F(q, \underline{p}, \alpha+1, \beta, \tau) \prod_{\vartheta=1}^{\tau} \prod_{s=\tau+1}^{\beta} K_{n_{q_\vartheta} m_{q_\vartheta}} K_{m_{\underline{p}_s}} P_{l''\bar{m}}(\mu),$$

где

$$F(q, \underline{p}, \alpha+1, \beta, \tau) = F(q, \underline{p}, \beta, \tau) F(n_{\alpha_1}, \ldots, n_{\alpha+1}, m_{\alpha_1}, \ldots, m_{\alpha+1}, l_{\alpha_1}, \ldots, l_\alpha) \tag{37}$$
$$\times F(l_\alpha, l', l'', m_{\alpha_1} + \cdots + m_{\alpha+1}, \bar{m}),$$

$$\bar{m} = \sum_{j=1}^{\beta} m_j + \beta - 2\tau, \tag{38}$$

а l'' принимает целые положительные значения в интервале $[|l'-l_\alpha|, l'+l_\alpha]$ Интегрируя (36) в интервале $[-1, 1]$ и учитывая, что

$$\int_{-1}^{+1} P_{l''\bar{m}}(\mu) d\mu = \sum_{t=0}^{\left[\frac{l''-\bar{m}}{2}\right]} f(l'', \bar{m}, t) \bar{g}(l'', \bar{m}, t), \tag{39}$$

где

$$f(l'', \bar{m}, t) = \frac{(-1)^t (2l''-2t)!}{2^{l''} t! (l''-t)! (l''-\bar{m}-2t)!} \tag{40}$$

и

$$\bar{g}(l'', \bar{m}, t) = \begin{cases} B\left(\frac{l''-\bar{m}-2t+1}{2}, \frac{\bar{m}+2}{2}\right), & \text{если } \bar{m}+l'' \text{ четное}, \\ 0, \text{ если } \bar{m}+l'' \text{ нечетное}, \end{cases} \tag{41}$$
$$[Re(l''-\bar{m}-2t) \geqq 0, \ Re\,\bar{m} \geqq -1],$$

получаем

$$\int_{-1}^{+1} P^{(1)}_{\alpha\alpha_1\beta}(\mu)d\mu \tag{42}$$

$$= \sum_{\substack{(i,l_i,\alpha_1,\alpha+1,\\ \tau,\vartheta,s,q_\vartheta,l_s,1,\\ \beta,l',l'',t)}} F(q,\underline{p},\alpha+1,\beta,\tau)f(l'',\bar{m},t)\bar{g}(l'',\bar{m},t)\prod_{\vartheta=1}^{\tau}\prod_{s=\tau+1}^{\beta} K_{n_{q_\vartheta}m_{q_\vartheta}}K_{m_{\underline{p}_s}}.$$

Аналогичным образом получаем

$$\int_{-1}^{+1} P^{(2)}_{\alpha\alpha_1\beta}(\mu)d\mu \tag{43}$$

$$= \sum_{\substack{(i,l_i,\alpha_1,\alpha,\tau,\\ \vartheta,s,q_\vartheta,l_s,1,\\ \beta+1,l''',l^{\mathrm{IV}},t)}} F(q,\underline{p},\beta+1,\alpha,\tau)f(l^{\mathrm{IV}},\bar{\bar{m}},t)\bar{\bar{g}}(l^{\mathrm{IV}},\bar{\bar{m}},t)\prod_{\vartheta=1}^{\tau}\prod_{s=\tau+1}^{\beta+1} K_{n_{q_\vartheta}m_{q_\vartheta}}K_{m_{\underline{p}_s}},$$

где

$$\begin{aligned} F(q,\underline{p},\beta+1,\alpha,\tau) &= F(n_{q_1},\ldots,n_{q_\tau},m_{q_1}-1,\ldots,m_{q_\tau}-1,l_1,\ldots,l_{\tau-1}) \\ &\times F(n_{\underline{p}_{\tau+1}},\ldots,n_{\underline{p}_{\beta+1}},m_{\underline{p}_{\tau+1}}+1,\ldots,m_{\underline{p}_{\beta+1}}+1,l_{\tau+1},\ldots,l_\beta) \\ \times F(n_{\alpha_1},\ldots,n_\alpha,m_{\alpha_1},\ldots,m_\alpha,l_{\alpha_1},\ldots,l_{\alpha-1}) &\times F(l_{\alpha-1},l^{\mathrm{III}},l^{\mathrm{IV}},m_{\alpha_1}+\cdots+m_\alpha,\bar{\bar{m}}) \\ &\times F(l_{\tau-1},l_\beta,l,m_{q_1}+\cdots+m_{q_\tau}-\tau,m_{\underline{p}_{\tau+1}}+\cdots+m_{\underline{p}_{\beta+1}}+\beta+1-\tau), \end{aligned} \tag{44}$$

$$\bar{\bar{m}} = \sum_{j=1}^{\beta+1} m_j + \beta + 1 - 2\tau + \sum_{i=\alpha_1}^{\alpha} m_i,$$

причем $\bar{\bar{g}}(l^{\mathrm{IV}},\bar{\bar{m}},t)$ выражается через бета-функцию Эйлера $B\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+2}{2}\right)$ следующим образом:

$$\bar{\bar{g}}(l^{\mathrm{IV}},\bar{\bar{m}},t) = \begin{cases} B\left(\frac{l^{\mathrm{IV}}-\bar{\bar{m}}-2t+1}{2},\frac{\bar{\bar{m}}+2}{2}\right), & \text{если } l^{\mathrm{IV}}+\bar{\bar{m}} \text{ четное}, \\ 0, & \text{если } l^{\mathrm{IV}}+\bar{\bar{m}} \text{ нечетное}, \end{cases} \tag{45}$$

$$[Re(l^{\mathrm{IV}}-\bar{\bar{m}}-2t)\geqq 0,\ Re\bar{\bar{m}}\geqq -1].$$

Кроме того, имеем

$$\int_{-1}^{+1} P^{(3)}_{\alpha\alpha_1\beta}(\mu)d\mu = \sum_{\substack{(l,t,l_i,\alpha_1,\alpha+1,\\ j,l_j,1,\beta,t)}} F(\alpha+1,\beta)f(l,\tilde{m},t)g(l,\tilde{m},t,\beta), \tag{46}$$

где

$$(47)\qquad g(l,\tilde{m},t,\beta)=\begin{cases} B\left(\frac{l-\tilde{m}-2t+1}{2},\ \frac{\tilde{m}-\beta+2}{2}\right), & \text{если } l+\tilde{m} \text{ четное},\\ 0, & \text{если } l+\tilde{m} \text{ нечетное},\end{cases}$$

$$[Re(l-\tilde{m}-2t)\geqq 0,\ Re(\tilde{m}-\beta)\geqq -1],\ \tilde{m}=\sum_{i=\alpha_1}^{\alpha+1} m_i+\sum_{j=1}^{\beta} m_j.$$

Рассмотрим теперь те интегралы в (24)—(26), подынтегральная функция которых зависит только от независимой переменной λ. Для этой цели в соответствии с формулой (3) [2] вводим

$$(48)\qquad \begin{pmatrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -I\end{pmatrix}[Z_{n_{\alpha+1}m_{\alpha+1}}\exp(I_{m_{\alpha+1}}\lambda)+Z^*_{n_{\alpha+1},m_{\alpha+1}}\exp(-Im_{\alpha+1}\lambda)],$$

$$I=\sqrt{-1},$$

где

$$Z_{n_{\alpha+1},m_{\alpha+1}}=1,$$

$$Z^*_{n_{\alpha+1},m_{\alpha+1}}=\begin{cases}1, & \text{если множитель перед } Z^* \text{ равен } 1,\\ -1, & \text{если множитель перед } Z^* \text{ равен } -1.\end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$(49)\qquad \prod_{i=\alpha_1}^{\alpha}\Lambda_{n_im_i}\begin{pmatrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -I\end{pmatrix}\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha+1}\Lambda_{n_im_i},$$

где

$$(50)\qquad \Lambda_{n_im_i}=\frac{1}{2}[Z_{n_im_i}\exp(Im_i\lambda_i)+Z^*_{n_im_i}\exp(-Im_i\lambda_i)].$$

Применяя к (49) формулу (4) [2], получаем

$$(51)\qquad \prod_{i=\alpha_1}^{\alpha+1}\Lambda_{n_im_i}\begin{pmatrix}\cos m\lambda\\ \sin m\lambda\end{pmatrix}=2^{\alpha_1-\alpha-2}Re\begin{pmatrix}1\\ -I\end{pmatrix}$$

$$\times\sum_{(\tau_\alpha,\vartheta,q_\vartheta,\alpha,\alpha+1)}\prod_{i=\alpha_1}^{\alpha+1}\prod_{\vartheta=\alpha_1}^{\tau_\alpha+\alpha_1-1}\left(\frac{Z_{n_im_i}Z^*_{n_{q_\vartheta}m_{q_\vartheta}}}{Z_{nq_\vartheta mq_\vartheta}}\right)\exp I\left[\left(\sum_{i=\alpha_1}^{\alpha+1}m_i-2\sum_{\vartheta=\alpha_1}^{\tau_\alpha+\alpha_1-1}m_{q_\vartheta}\right)\lambda\right].$$

Аналогичным образом имеем

$$(52)\qquad \prod_{j=1}^{\beta}\Lambda_{n_jm_j}=2^{-\beta}Re\sum_{(\tau_\beta,\vartheta',q_{\vartheta'},1,\beta)}\prod_{j=1}^{\beta}\prod_{\vartheta'=1}^{\tau}$$

$$\left(\frac{Z_{n_im_i}Z^*_{n_{q_{\vartheta'}}m_{q_{\vartheta'}}}}{Z_{nq_{\vartheta'}mq_{\vartheta'}}}\right)\exp I\left[\left(\sum_{j=1}^{\beta}m_j-2\sum_{\vartheta'=1}^{\tau_\beta}m_{q_{\vartheta'}}\right)\lambda\right].$$

В формулах (51) и (52)

$$(53)\qquad \sum_{(\tau_\alpha,\vartheta,q_\vartheta,\alpha,\alpha+1)} = \sum_{\tau_\alpha=0}^{\alpha+1} \prod_{\vartheta=\alpha_1}^{\tau_\alpha+\alpha_1-1} \left(\sum_{q_\vartheta=q_{\vartheta-1}+1}^{\alpha-\alpha_1+\vartheta-\tau_\alpha+2} \right)_{(q_0=0)}.$$

Кроме того, $\sum\limits_{(\tau_\beta,\vartheta',q_{\vartheta'},1,\beta)} = \sum\limits_{\tau_\beta=0}^{\beta} \prod\limits_{\vartheta'=1}^{\tau_\beta} \left(\sum\limits_{q_{\vartheta'}=q_{\vartheta'-1}+1}^{\beta+\vartheta'-\tau_\beta} \right),$

$$(54)\qquad \begin{aligned} Z_{nm} &= a_{nm} + Ib_{nm}, \\ Z^*_{nm} &= a_{nm} - Ib_{nm}. \end{aligned}$$

Из (51) и (52) получаем

$$(55)\qquad \int_0^{2\pi} D_{\alpha\alpha_1\beta}(\lambda) \begin{pmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{pmatrix} d\lambda$$

$$= 2^{\alpha_1-\alpha-\beta-2} Re \begin{pmatrix} 1 \\ -I \end{pmatrix} \sum_{\substack{(\tau_\alpha,\tau_\beta,\vartheta,\vartheta',\\ q_\vartheta,q_{\vartheta'},\alpha,\\ 1,\beta,\alpha+1)}} \prod_{i=\alpha_1}^{\alpha+1} \prod_{j=1}^{\beta} \prod_{\vartheta=\alpha_1}^{\tau_\alpha+\alpha_1-1} \prod_{\vartheta'=1}^{\tau_\beta} \left(\frac{Z_{n_j m_j} Z_{n_i m_i} Z^*_{n_{q_\vartheta} m_{q_\vartheta}} Z^*_{n_{q_{\vartheta'}} m_{q_{\vartheta'}}}}{Z_{n_{q_\vartheta} m_{q_\vartheta}} Z_{n_{q_{\vartheta'}} m_{q_{\vartheta'}}}} \right)$$

$$\times \int_0^{2\pi} \exp\left\{ I \left[\sum_{i=\alpha_1}^{\alpha+1} m_i + \sum_{j=1}^{\beta} m_j - 2 \left(\sum_{\vartheta=\alpha_1}^{\tau_\alpha+\alpha_1-1} m_{q_\vartheta} + \sum_{\vartheta'=1}^{\tau_\beta} m_{q_{\vartheta'}} \right) \right] \lambda \right\} d\lambda.$$

Поскольку

$$(56)\qquad \int_0^{2\pi} \exp\left[I(M-2N)\lambda \right] d\lambda = 2\pi\delta_{M,2N},$$

где $\delta_{M,2N}$ — дельта Кронекера, получаем

$$(57)\qquad \int_0^{2\pi} D_{\alpha\alpha_1\beta}(\lambda) \begin{pmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{pmatrix} d\lambda$$

$$= 2^{\alpha_1-\alpha-\beta-1} \pi Re \begin{pmatrix} 1 \\ -I \end{pmatrix} \sum_{\substack{(\tau_\alpha,\tau_\beta,\vartheta,\vartheta',\\ q_\vartheta,q_{\vartheta'},\alpha,\\ 1,\alpha+1,\beta)}} \prod_{i=\alpha_1}^{\alpha+1} \prod_{j=1}^{\beta} \prod_{\vartheta=\alpha_1}^{\tau_\alpha+\alpha_1-1} \prod_{\vartheta'=1}^{\tau_\beta} \left(\frac{Z_{n_i m_i} Z_{n_j m_j} Z^*_{n_{q_\vartheta} m_{q_\vartheta}} Z^*_{n_{q_{\vartheta'}} m_{q_{\vartheta'}}}}{Z_{n_{q_\vartheta} m_{q_\vartheta}} Z_{n_{q_{\vartheta'}} m_{q_{\vartheta'}}}} \right) \delta_{M,2N},$$

где

$$(58)\qquad M = \sum_{i=\alpha_1}^{\alpha+1} m_i + \sum_{j=1}^{\beta} m_j; \quad N = \sum_{\vartheta=\alpha_1}^{\tau_\alpha+\alpha_1-1} m_{q_\vartheta} + \sum_{\vartheta'=1}^{\tau_\beta} m_{q_{\vartheta'}}.$$

Аналогичным образом получаем

$$(59)\qquad \int_0^{2\pi} \widetilde{D}_{\alpha\alpha_1\beta}(\lambda) \begin{pmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{pmatrix} d\lambda = 2^{\alpha_1-\alpha-\beta-1} \pi Re I^\beta \begin{pmatrix} 1 \\ -I \end{pmatrix}$$

$$\times \sum_{\substack{(\tau_\alpha,\tau_\beta,\vartheta,\vartheta',\\ q_\vartheta,q_{\vartheta'},\alpha,\\ 1,\beta,\alpha+1)}} (-1)^{\beta-\tau_\beta} \prod_{i=\alpha_1}^{\alpha+1} \prod_{j=1}^{\beta} \prod_{\vartheta=\alpha_1}^{\tau_\alpha-\alpha_1-1} \prod_{\vartheta'=1}^{\tau_\beta} m_j \left(\frac{Z_{n_i m_i} Z_{n_j m_j} Z^*_{n_{q_\vartheta} m_{q_\vartheta}} Z^*_{n_{q_{\vartheta'}} m_{q_{\vartheta'}}}}{Z_{n_{q_\vartheta} m_{q_\vartheta}} Z_{n_{q_{\vartheta'}} m_{q_{\vartheta'}}}} \right) \delta_{M,2N}.$$

Теперь коэффициенты $\mathfrak{G}_{nm}$ и $\mathfrak{M}_{nm}$ в (24)—(26) определяем с помощью формул (42), (43), (46), (56) и (58) следующим образом:

$$(60) \quad \begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \\ \mathfrak{M}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} = \pi h_{nm} \sum_{n_i m_i n_j m_j} \sum_{\substack{(i,l_i,\alpha_1,\alpha+1,\\ \tau,\vartheta,s,q_\vartheta,l_s,\\ 1,\beta,l',l'',t)}} \begin{pmatrix} T_{\alpha\alpha_1\beta} \\ T'_{\alpha\alpha_1\beta} \end{pmatrix} F(q,\underline{p},\alpha+1,\beta,\tau)$$

$$\times f(\bar{m},l'',t)\bar{g}(l'',\bar{m},t) \prod_{\vartheta=1}^{\tau} \prod_{s=\tau+1}^{\beta} K_{n_{q_\vartheta} m_{q_\vartheta}} K_{m_{\underline{p}_s}};$$

$$(61) \quad \begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{nm|\theta}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \\ \mathfrak{M}_{nm|\theta}^{\alpha\alpha_1\beta|\theta}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} = \pi h_{nm} \sum_{n_i m_i n_j m_j} \sum_{\substack{(i,l_i,\alpha_1,\alpha,\\ \tau,\vartheta,s,q_\vartheta,l_s,\\ 1,\beta+1,l''',l^{\mathrm{IV}},t)}} \begin{pmatrix} T_{\alpha\alpha_1\beta} \\ T'_{\alpha\alpha_1\beta} \end{pmatrix} F(q,\underline{p},\alpha,\beta+1,\tau)$$

$$\times f(l^{\mathrm{IV}},\bar{\bar{m}},t)\bar{\bar{g}}(l^{\mathrm{IV}},\bar{\bar{m}},t) \prod_{\vartheta=1}^{\tau} \prod_{s=\tau+1}^{\beta+1} K_{n_{q_\vartheta} m_{q_\vartheta}} K_{m_{\underline{p}_s}};$$

$$(62) \quad \begin{bmatrix} \mathfrak{G}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu,\lambda) \\ \mathfrak{M}_{nm}^{\alpha\alpha_1\beta|\lambda}(\mu,\lambda) \end{bmatrix} = \pi h_{nm} \sum_{n_i m_i n_j m_j} \sum_{\substack{(i,l_i,\alpha_1,\alpha+1,\\ \tau,\vartheta,s,q_\vartheta,l_s,\\ 1,\beta,l',l'',t)}} \begin{pmatrix} \tilde{T}_{\alpha\alpha_1\beta} \\ \tilde{T}'_{\alpha\alpha_1\beta} \end{pmatrix} F(\beta,\alpha+1)$$

$$\times f(l,\tilde{m},t)g(l,\tilde{m},\beta,t).$$

Входящие в формулах (60)—(61) величины $T_{\alpha\alpha_1\beta}$, $T'_{\alpha\alpha_1\beta}$, $\tilde{T}_{\alpha\alpha_1\beta}$ и $\tilde{T}'_{\alpha\alpha_1\beta}$ являются многочленами, которые определяются с помощью (57) и (59). Надо отметить, что в этих многочленах входит дельта Кронекера. Это обстоятельство весьма важно, поскольку суммирование в (57) и (59) ведется только по членам, для которых дельта Кронекера отлична от нуля.

Полученные выражения (60)—(62) вместе с выражениями (14)—(17) полностью решают поставленную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкодров Вл. Докл. БАН, **24** (1971), № 10.
2. Шкодров Вл. Изв. на Секция по астрономия, 6. БАН, 1973.

Поступило 21. VI. 1971 г.

ВЪРХУ НЯКОИ ИНТЕГРАЛНИ СВОЙСТВА НА СФЕРИЧНИТЕ ФУНКЦИИ

В. Шкодров

(Резюме)

Често при решаването на някои задачи в сферичната координатна система се налага да бъдат изчислявани интеграли върху единична сфера, като подинтегралната функция на такива интеграли е произведение от сферични функции или от техните производни. Те често могат да се приведат към някои общи интегрални форми, решенията на които са разгледани в настоящата работа.

ON SOME INTEGRAL PROPERTIES OF SPHERICAL FUNCTIONS

V. Shkodrov

(Summary)

The solutions of some general integral forms to which an integral, whose sub-integral functions are the product of spherical functions and their derivatives may be reduced, have been obtained.