БОЛГАРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК . BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 5. ASTROPHYSICAL INVESTIGATIONS, 5
София , 1989 . Sofia

Небесная механика. Планеты
Celestial mechanics. Planets

О применении универсальных функций Бэттина при определении траекторий комет

Б. Николов, Ст. Спасов

1. Хорошо известно, что задача Ламберта состоит в определении кеплеровой орбиты, связывающей два заданных вектора положения $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, когда интервал времени τ прохождения из точки с радиус-вектором $\vec{r}_1$ в точку с радиус-вектором $\vec{r}_2$ известен. Обычно эта задача решается при помощи классического уравнения Кеплера. Последнее, однако, очень трудно решить, когда эксцентрицитет траекторий близок к единице (скажем, 0,99975 или 1,00048), что характерно для траекторий большинства комет. В этом случае орбита близка к параболической траектории, для которой уравнение Кеплера заменяется уравнением Баркера и поэтому уравнение Кеплера плохо обусловлено.

Оказалось, что для преодоления возникающих трудностей можно использовать так называемые универсальные переменные, введенные впервые Штумпфом [1]. При этом формулировка задачи двух тел не зависит от вида орбиты, и орбиты, близкие к параболическим, не приводят к трудностям. Идея метода универсальных переменных следующая [2]. В уравнении движения

$$\ddot{\vec{r}}+\mu\,\vec{r}/r^3=0 \qquad \begin{array}{l}\vec{r}(0)=\vec{r}_1\\ \dot{\vec{r}}(0)=\vec{v}_1\end{array} \tag{1}$$

(имеющее особенность при $\vec{r}=0$) производится преобразование Сандмэна [3]

$$dt=r\,d\psi, \tag{2}$$

при помощи которого уравнение (1) регуляризуется и приводится к виду

$$\vec{r}''-\alpha\vec{r}=\vec{C}, \tag{3}$$

где штрих $'$ обозначает дифференцирование относительно переменной ψ (называемой обобщенной эксцентрической аномалией),

(4) $$\alpha=V_1^2-2\mu/r_1 \text{ — энергетический параметр,}$$

а $\vec{C}$ — постоянный вектор, равный

$$\vec{C}=\vec{r}_1''-\alpha\vec{r}_1.$$

В прямоугольных координатах уравнение (3) легко решается, и решение можно записать в виде (2):

(5) $$\vec{r}=(1-\mu S_2 r_1)\vec{r}_1+(t-\mu S_3)\vec{V}_1,$$

где

(6) $$S_n=S_n(\alpha,\ \psi)=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p\psi^{2p+n}/(2p+n)! \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots)$$

— так называемые универсальные функции Гудьяра [4].

Надо отметить, что хотя функции Гудьяра [6] очень удобны в теоретических исследованиях, для практических вычислений они оказываются малоэффективными, поскольку как функции двух переменных являются трудно программируемыми. Поэтому в настоящей работе, посвященной решению задачи Ламберта, мы модифицируем метод решения той же задачи, предложенный Питкиным [5], основанный на применении функций Гудьяра, так, чтобы вычислительные формулы выражались через функции Бэттина [6]:

(7) $$S(y)=\sum_{k=0}^{\infty}(-y)^k/(2k+2)!$$

$$C(y)=\sum_{k=0}^{\infty}(-y)^k/(2k+3)!$$

Эти функции используются [6] для универсальной записи уравнения Кеплера, включающей описания как эллиптического, так и гиперболического движения.

2. Мы исходим из соотношения (5), записанного через функции Бэттина [7], для $\vec{r}=\vec{r}_2$, $t=\tau=t_2-t_1$

(8) $$\vec{r}_2=g\vec{r}_1+f\vec{V}_1,$$

где

(8 a) $$\begin{gathered} g=1-x^2C(y)/r_1 \\ f=\tau-x^3S(y)/\mu^{1/2} \\ x+\mu^{1/2}\psi,\ y=\alpha x^2/\mu. \end{gathered}$$

Следуя Питкину [5], умножаем скалярно (8) на r_1 и получаем

(9) $$\nu=gr_1^2+\mu^{1/2}Af,$$

где $\nu=\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2$, $A=\vec{r}_1\cdot\vec{V}_1\mu^{-1/2}$.

Заметим, что константа A участвует также в универсальном уравнении Кеплера (7, 8):

(10) $$\mu^{1/2}\tau=Ax^2C+(1-\alpha r_1)x^3S+xr_1,$$

а также и в скалярном уравнении для радиуса (7, 8):

(11) $$r_2=xA(1-\alpha x^2S)+(1-\alpha r_1)x^2C+r_1,$$

где $S=S(y)$, $C=C(y)$.

Исключая неизвестную константу A из уравнений (8), (10), (11), получаем систему трансцендентных уравнений:

(12) $$\begin{aligned} &F_1(x,y)\equiv\mu^{1/2}\tau y-x^3+(yx^3-\mu^{1/2}\tau y^2)S+[2x^3-(r_1-r_2)xy]C=0,\\ &F_2(x,y)\equiv(\mu^{1/2}\tau-x^3S)^2-(\nu+r_1r_2)x^2C=0.\end{aligned}$$

Решение системы (12) позволяет определить энергетический параметр α (4), $\alpha=\mu y/x^2$, а отсюда, используя (4), можно определить и величину V_1 начальной скорости.

Далее, если через V_{1r} и $V_{1\tau}$ обозначим соответственно радиальную и тангенциальную составляющие вектора скорости $\vec{V}_1$, имеем (8)

(13) $$\begin{aligned} &\vec{V}_1=V_{1r}\vec{i}_{1r}+V_{1\tau}\vec{i}_{1\tau},\\ &V_{1r}=\mu^{1/2}A/r_1,\\ &V_{1\tau}=[\mu(2r_1-\alpha-A^2/r_1^2)]^{1/2},\end{aligned}$$

где $A=[r_2-r_1-(1-\alpha r_1)x^2C](x-\alpha x^3S)^{-1}$,

(14) $$\begin{aligned} &\vec{i}_{1r}=\vec{r}_1/r_1 \quad \vec{i}_{2r}=\vec{r}_2/r_2,\\ &\vec{i}_{1\tau}=\vec{i}_n\times\vec{i}_{1r},\\ &i_n=\begin{cases}\vec{n}/n, & n\neq 0,\\ \vec{i}_n^{\,0}, & n=0\end{cases}\\ &\vec{n}=\vec{i}_{1r}\times\vec{i}_{2r}.\end{aligned}$$

Здесь через $\vec{i}_n^{\,0}$ обозначен произвольный единичный вектор, нормальный к $\vec{i}_{1r}$, который может быть определен при заданном наклонении i орбиты (8). Таким образом задача Ламберта сводится к решению нелинейной системы (12). Эту систему можно решить при помощи классического метода Ньютона, исходя из начального приближения:

(15) $$\begin{aligned} &x_0=\mu^{1/2}\tau/r_1,\\ &y_0=\alpha x_0^2/\mu.\end{aligned}$$

Далее вычисления производятся по формулам (8а), (13), (14).

Предлагаемый алгоритм можно запрограммировать на ЭВМ, используя существующие программы [7] для вычисления значений функций Бэттина [7[.

Авторы высказывают сердечную благодарность Б. Ц. Бахшияну из ИКИ АН СССР за содействие при выполнении этой работы.

Литература

1. Штумпф (Stumpf, K.). 1947. Astron. Nachr., **275**, p. 108.
2. Эверхарт и Питкин (Everhart, E., E. T. Pitkin). 1983. Am. J. Phys., **51**, p. 712.
3. Сандмэн (Sundman, K.). 1912. Acta mathematica, **36**, v. 105.
4. Гудьяр (Goodyear, W. H.). 1965. Astron. J., **70**, p. 189.
5. Питкин (Pitkin, E. T.). 1968. J. Astronaut. Sci., **15**, p. 270.
6. Бэттин (Battin, R. H.). 1964. Astronautical Guidance N. Y.: McGrow Hill.
7. Бахшиян, Б. Ц., А. А. Суханов. 1978. Препринт ИКИ, Пр. — 420.
8. Космическая навигация. М., 1975.

On the application of universal Battin functions for determination of comet orbits

B. Nikolov, St. Spassov

(Summary)

The Lambert problem for determination of Kepler trajectory connecting given points for a known time interval is considered from the viewpoint of the theory of universal variables. An algorithm for solving the Lambert problem using Battin functions is proposed.

Самостоятельный сектор астрономии с Национальной астрономической обсерваторией Болгарской академии наук

Поступила 21. III. 1983 г.