БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
АСТРОФИЗИЧЕСКИ ИЗСЛЕДВАНИЯ, 7 • ASTROPHYSICAL INVESTIGATIONS, 7
София • 1996 • Sofia

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ ЭФФЕКТОВ НА ДВИЖЕНИЕ ДВОЙНОЙ СИСТЕМЫ

В. С. Милева
ССА с НАО, БАН, София

В последнем десятилетии, в связи с уточнением небесно-механических релятивистских экспериментов, а также в связи с возращающими требованиями к более точному описанию движений небесних тел, появляются работы, посвящены влиянию приливных сил на орбитальное движение компонентов планетных и звездных систем. На первый взгляд, это влияние кажется малым.

В [1] , например, обсуждены релятивистские эффекты в поступательно-вращательном движении внутренних тел Солнечной системы, связаны с распространением радиоволн; проведены радиолокационные эксперименты и радиоинтерферометрические измерения, причем требуется 1% точность при проверке релятивистических эффектов. В этой работе приливные силы не учтены.

В [2] уже замечено невязки в движении перигелиев внутренних планет, о причин которых следует выдвинуть ряда гипотез.

Ряд работ посвящено эволюции элементов орбит планет в процессе их формирования и о вековому изменении этих элементов и угловых скоростей планет. В [3] , например, исследована эволюция эксцентрицитета планетных орбит при их формировании. [4] и [5] посвящены вековому изменению угловой скорости вращения Земли, в которых есть доля влияния резонансного воздействия упругих приливных сил. Влияние резонансов на устойчивость Солнечной системы учтено в [6] , а в [7] , кроме этого, в качестве критерия для резонансного или нерезонансного состояния Солнечной системы берется соотношение между диссипативными силами и возмущениями гравитации, которое имеет важное место в выдвинутой автором космогонической гипотезе.

История эволюции системы Земля-Луна, более доступная для наблюдения, привлекла внимание авторов [8], которые ставят гипотезу о захвате Луны посредством ее приливное взаимодействие с Землей. Влияние суточных приливов и возникшего при этом приливного трения на лунную орбиту рассмотрено в [9]; там утверждается, что наклонение орбиты Луны чувствительно к этим возмущениям, в зависимости от начальных отклонений. В [10] исследование приливных сил системы Земля-Луна проведено разложением силовой функции двух тел по сферическим функциям.

Автор [11] исследует по графическому методу Дарвина приливную эволюцию системы планета-спутник, при ряде ограничений: круговая орбита спутника, постоянная скорость вращения планеты, перпендикулярность оси вращения к орбите. Спутник апроксимируется в точку. Эволюция разделена на две фазы: от возникновения двойной системы до того момента, в котором угловая скорость становится равной среднему движения, и после этого. В [12] уравнения равновесия компонента тесной двойной системы составлены с учетом вращения и приливных эффектов.

*

Исследование влияния приливных эффектов на движение спутника обычно сводится к тому, что в качестве возмущающих эффектов принимаются приливные изменения его тензора инерции. Таким образом, однако, не учитывается то существенное обстоятельство, что приливные напряжения, возникающие в материи спутника, разные по своей физической сущности. Одни из них упругие; они вызывают обратимые изменения энергии спутника; их влияние сводится к короткопериодическим эффектам, но оно допускает наличия резонансов. Другие - неупругие; они возникают в те области спутника, в которых приливные напряжения превосходят напряжение пропорциональности соответного материала. В таком случае, при последовательном нагружении и разгружении материала происходит потеря энергии, за счет изменения структуры материала, дислокации, внутреннего трения и пр. Механизм этого явления показан на фиг. [1]; о нем можно навести более подробные справки в [13], [14], [15] и пр. К сожалению, однако, существует ограниченное число материалов, для которых проведены эксперименты на циклическом нагружении в стадии пластичности, а интегральных данных про диссипации энергии от неупругих деформаций вообще нет, даже в совсем приблизительном аспекте оценки. Нет данных и про поведении материи ядер планет; а самая большая часть пластических приливных деформаций происходит именно около центров планет и звезд.

Предлагаемая работа составляет часть более обширного исследования влияния приливных эффектов от упругих и неупругих деформаций, от приливного трения флюидов при соприкосновении с твердой поверхностью, от внутреннего трения, от вискозитета материи и пр.

Параллельно с теоретической разработкой, автор ставит себе задачу обратить внимание экспериментаторов на то обстоятельство, что построение $\sigma-\varepsilon$ диаграмм в стадии пластичности для разных пород скал, и для моделей, близких к планет типа Меркурия и к другим небесним телам совсем не лишено целесообразности. Представляли бы особый интерес такие эксперименты, которые бы могли указать на потерю энергии для граничных случаев – для самого упругого и самого неупругого материала, состоявших в компонентов данного небесного тела. Для выяснения истории динамики Солнечной системы, для уточнения эволюции орбит небесных тел и для более точного понимания теории относительности такие эксперименты были бы от особого значения.

Рассматривается автономная система, состоявшая из центрального тела с массой M, с центром масс в т. O, со сферическим тензором инерции, с осевым моментом инерции J, и из спутника с массой m, с центром масс в точке P, с главними моментами инерции A,B и B, обладающим осесимметричным тензором инерции. Спутник представляет деформируемое теле; напряжение в некоторых его частей превосходят границу пропорциональности σ_p.

Ставится задача об определении возмущений в орбитальном и во вращательном движениях обеих тел, вызванных диссипацией энергии вследствие приливных эффектов.

В первой части работы, оформленной в настоящей статье, исследуются длиннопериодические и вековые эффекты только от пластических деформаций. Притом, короткопериодические эффекты исключены путем осреднения диссипации энергии по отношению к истинной аномалии спутника, или, что почти то же самое - по отношению ко времени. Разница между этими двумя вариантами - небольшая короткопериодическая величина, убывающая вместе с эксцентрицитетом орбиты.

ж

Центр инерции всей системы обозначен C. При исследовании использованы две системы координат:

1/ $CXYZ$ - инерциальная право ориентированная Декартова система координат с центром в т. C, с плоскостью CXY, совпадающей с невозмущенным положением плоскости орбиты, с осями CX, направленной к невозмущенному перигелию спутника, CY - к ближайшему положению по направлению движения спутника, CZ - по направлению невозмущенного положения орбитального момента количества движения.

2/ Связанная со спутником система координат $Pxyz$, с осями P_z, совпадающей с осью вращения его эллипсоида инерции, а P_y и P_x – в перпендикулярной ей плоскости, причем эта система-тоже право ориентированная Декартова система координат.

В качестве обобщенных координат, определяющих положение тел в инерциальном пространстве, принято: проекция расстояния от центра масс спутника P до центра масс центрального тела O, на плоскость XOY, обозначенное r. Угол ν, заключенный между направлением OX и проекцией радиуса-вектора $\overline{OP}$ на плоскост XOY; в невозмущенном движении этот угол обозначает истинную аномалию;

– "Депланация" d – расстояние от плоскости XOY до возмущенного положения точки P.

– Угловые координаты φ, ϑ, ψ /углы собственного вращения, нутации и прецессии/, определяющие положение связанной системе координат по отношению к инерциальной, или иными словами, определяющие угловое положение спутника в инерциальном пространстве.

– Угловые координаты $\varphi_\Theta, \vartheta_\Theta, \psi_\Theta$, определяющие угловое положение центрального тела в инерциальном пространстве.

– Обобщенные импульсы вышеуказанных переменных, p_i.

При таком выборе переменных и с применением канонических уравнений Гамильтона получилось удовлетворительное решение при наложении меньшего числа ограничивающих условий и упрощений.

*

Общая энергия системы E в принятых координатах записывается в виде:

$$/1/\quad E = \frac{1}{2}m\left(\dot r^2 + r^2\dot\nu^2 + \dot d^2\right) + \frac{1}{2}A\left(\dot\psi^2\sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2\right) + \frac{1}{2}C\left(\dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}J\left(\dot\psi_\Theta^2 + \dot\vartheta_\Theta^2 + \dot\varphi_\Theta^2 + 2\dot\psi_\Theta\dot\varphi_\Theta\cos\vartheta_\Theta\right) - \frac{fmM}{(r^2+d^2)^{1/2}} + D.V./$$ 16, стр. 157,201,211/

Здесь $\dot{r}, \dot{d}, \dot{\nu}, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}_\Theta, \dot{\vartheta}_\Theta, \dot{\psi}_\Theta$ обозначают производные по времени обобщенных координат /обобщенные скорости/.

$\mathrm{M} = \frac{mM}{m+M}$ есть параметр с размерностью массы.

$\mathfrak{D}\nu$ есть диссипация энергии. Коэффициент диссипации $\mathfrak{D}$ имеет размерность энергии; $\mathfrak{D}$ – величина постоянная. Выражение $\mathfrak{D}\nu$ можно рассматривать как потенциал некоей фиктивной силы /в данном случае – момента/, вопреки тому, что по своей физической сущности задача неконсервативная. Такое упрощение идет за счет усреднения энергии диссипации; оно дает возможность пользоваться каноническими уравнениями Гамильтона в их обычном виде.

Кинетическая энергия системы равна E_K:

$$/2/\quad E_K = \frac{1}{2}\mathrm{M}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\nu}^2 + \dot{d}^2\right) + \frac{1}{2}A\left(\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) + \frac{1}{2}C\left(\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}J\left(\dot{\varphi}_\Theta^2 + \dot{\vartheta}_\Theta^2 + \dot{\psi}_\Theta^2 + 2\dot{\psi}_\Theta\dot{\varphi}_\Theta\cos\vartheta_\Theta\right).$$

Из /2/ получены обобщенные импульсы системы:

$$p_r = \frac{\partial E_K}{\partial \dot{r}} = \mathrm{M}\dot{r} \qquad p_\varphi = \frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}) \qquad p_{\varphi_\Theta} = J(\dot{\varphi}_\Theta + \dot{\psi}_\Theta\cos\vartheta_\Theta)$$

$$/3/\quad p_\nu = \frac{\partial E_K}{\partial \dot{\nu}} = \mathrm{M}r^2\dot{\nu} \qquad p_\vartheta = \frac{\partial E_K}{\partial \dot{\vartheta}} = A\dot{\vartheta} \qquad p_{\vartheta_\Theta} = J\dot{\vartheta}_\Theta$$

$$p_d = \frac{\partial E_K}{\partial \dot{d}} = \mathrm{M}\dot{d} \qquad p_\psi = \frac{\partial E_K}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi}\sin^2\vartheta + C\cos\vartheta(\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}),\quad p_{\psi_\Theta} = J(\dot{\psi}_\Theta - p_{\varphi_\Theta}\cos\vartheta_\Theta)$$

Обратно, обобщенные скорости, выражены при помощи обобщенных импульсов, суть:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\mathrm{M}} \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{C} - \frac{\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}(p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta) \qquad \dot{\varphi}_\Theta = \frac{p_{\varphi_\Theta}}{J} - \frac{\cos\vartheta_\Theta}{J\sin^2\vartheta_\Theta}(p_{\psi_\Theta} - p_{\varphi_\Theta}\cos\vartheta_\Theta)$$

$$/4/\quad \dot{\nu} = \frac{p_\nu}{\mathrm{M}r^2} \qquad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{A} \qquad \dot{\vartheta}_\Theta = \frac{p_{\vartheta_\Theta}}{J}$$

$$\dot{d} = \frac{p_d}{\mathrm{M}} \qquad \dot{\psi} = \frac{1}{A\sin^2\vartheta}(p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta) \qquad \dot{\psi}_\Theta = \frac{1}{J\sin^2\vartheta_\Theta}(p_{\psi_\Theta} - p_{\varphi_\Theta}\cos\vartheta_\Theta)$$

Гамильтониан системы, H, можно получить из /1/ и /4/:

$$/5/\quad H = \frac{1}{2\mathrm{M}}\left(p_r^2 + p_d^2 + \frac{1}{r^2}p_\nu^2\right) + \frac{(p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} + \frac{p_\vartheta^2}{2A} + \frac{p_\varphi^2}{2C} + \frac{(p_{\psi_\Theta} - p_{\varphi_\Theta}\cos\vartheta_\Theta)^2}{2J\sin^2\vartheta_\Theta} + \frac{p_{\vartheta_\Theta}^2 + p_{\varphi_\Theta}^2}{2J} - \frac{fmM}{(r^2+d^2)^{1/2}} + \mathfrak{D}\nu.$$

Канонические уравнения Гамильтона составляют нелинейную систему дифференциальных уравнений восемьнадцатого порядка. Их можно записать в виде

$$
\begin{array}{lll}
 & \dot r = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{1}{m} p_r & \dot p_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\nu^2}{m r^3} - \frac{f m M r}{(r^2+d^2)^{3/2}} \\
 & \dot \nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu} = \frac{1}{m r^2} p_\nu & \dot p_\nu = -\frac{\partial H}{\partial \nu} = -D \\
 & \dot d = \frac{\partial H}{\partial p_d} = \frac{1}{m} p_d & \dot p_d = -\frac{\partial H}{\partial d} = -\frac{f m M d}{(r^2+d^2)^{3/2}} \\
 & \dot \varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{C} - \frac{\cos\vartheta}{A \sin^2\vartheta}(p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta) & \dot p_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \\
/6/ & \dot \vartheta = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{A} & \dot p_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{(p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta)(p_\psi\cos\vartheta - p_\varphi}{} \\
 & \dot \psi = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = \frac{p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta} & \dot p_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \\
 & \dot \varphi_\odot = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi_\odot}} = \frac{p_{\varphi_\odot}}{J} - \frac{\cos\vartheta_\odot}{J\sin\vartheta_\odot}(p_{\psi_\odot} - p_{\varphi_\odot}\cos\vartheta_\odot) & \dot p_{\varphi_\odot} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_\odot} = 0 \\
 & \dot \vartheta_\odot = \frac{\partial H}{\partial p_{\vartheta_\odot}} = \frac{p_{\vartheta_\odot}}{J} & \dot p_{\vartheta_\odot} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_\odot} = \frac{(p_{\psi_\odot} - p_{\varphi_\odot}\cos\vartheta_\odot)(p_{\psi_\odot}\cos\vartheta_\odot - p_{\varphi_\odot})}{} \\
 & \dot \psi_\odot = \frac{\partial H}{\partial p_{\psi_\odot}} = \frac{p_{\psi_\odot} - p_{\varphi_\odot}\cos\vartheta_\odot}{J\sin^2\vartheta_\odot} & \dot p_{\psi_\odot} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_\odot} = 0 .
\end{array}
$$

Сразу бросается в глаза тот факт, что в уравнения, определяющие угловые координаты и импульсы обеих тел, не входят ни остальные переменные, ни возмущающий фактор $\mathfrak{D}$. Со своей стороны, угловые координаты и их импульсы не входят в первые шесть уравнения /6/, определяющие орбитальное движение. Система /6/, следовательно, распадается на две независимые группы уравнения: первые шесть определяют возмущенное орбитальное движение спутника /от которых можно получить также возмущенное орбитальное движение центрального тела/, а остальные двенадцать уравнения остаются такими, какими были бы, если бы не было диссипации энергии, и определяют угловое движение обеих тел, остающееся невозмущенным.

Пятое из уравнений /6/ интегрируется разделением переменных:

/7/ $$p_\nu = \underline{K} - \mathfrak{D} t.$$

Подставив интеграл /7/ в /6.2/, можно получить закон возмущения постоянной площадей:

/8/ $$m r^2 \dot{\nu} = \underline{K} - \mathfrak{D} t.$$

/Постоянная интегрирования $\underline{K}$ и есть постоянная площадей невозмущенного движения./

Таким образом, имеется уже две постоянных интегрирования /E и K/, для которых известны их возмущения.

Если невозмущенные значения этих постоянных обозначить $\underline{E}$ и $\underline{K}$, можно записать, что

/9/ $$E = \underline{E} + \mathfrak{D} \nu,$$

или, в другом аспекте усреднения диссипации по t,

/9'/ $$E = \underline{E} - \mathfrak{D}_1 t = \underline{E} - \mathfrak{D} n t.$$

Здесь n обозначает среднее движение спутника.

Возмущенная постоянная площадей есть

/10/ $$K = \underline{K} - \mathfrak{D} t.$$

Наличие двух, известних уже возмущенных постоянних интегрирования, указывает, что в данном случае удобно воспользоваться ими и попробовать при их помощи выразить параметры орбиты спутника, вместо применения другого метода решения малых возмущений.

*

В возмущенную постоянную K входят переменные r и $\dot{\nu}$, соотв. p_ν; α и $\dot{\alpha}$, соотв. p_α входят вместе с ними только в возмущенную постоянную энергии E, соотв. H. Обобщенный импульс p_α не входит в уравнения, определяющие r, ν, p_α и p_ν. При том, только в уравнение для p_r входит переменная α, невозмущенное значение которой - нуль.

Все эти соображения свидетельствуют о том, что влияние величин d и p_d в решение этой задачи мало, или его вообще нет.

Если линеаризовать четвертое уравнение /6/ по d, при предположении, что отношение $\frac{d}{r}$ мало, разложение $\dot{p}_r$ в ряд по степеням d даст:

$$/11/ \qquad \dot{p}_r = \frac{1}{\mu r^3}(\underline{K} - Dt)^2 - \frac{fmM}{r^2} + 0\frac{d}{r^4} - 0.\frac{d^2}{r^6} + \ldots$$

Из разложения /11/ видно, что все коэффициенты разложения перед степенями d нули; можно считать, что $\dot{p}_r$ не зависит от d и принять с очень высокой степенью точности, что

$$/11'/ \qquad \dot{p}_r = \frac{1}{\mu r^3}(\underline{K} - Dt)^2 - \frac{fmM}{r^2}.$$

Таким образом, уравнения, определяющие орбитальное движение, выделяются в самостоятельную систему четырех уравнений 6.1, 6.2, 6.4 /или 11'/ и 6.5, решение которых можно получить в квадратурах.

Остальные два уравнения, содержащие d и p_d, можно объединить в дифференциальное уравнение второго порядка.

$$/12/ \qquad \ddot{d} = -\frac{fmM}{\mu(r^2+d^2)^{3/2}},$$

в котором возмущающим фактором являются возмущение величины r, обозначенное ρ, которое мало по сравнению с r. Величина d и ее возмущение, обозначенное δ, в невозмущенной задаче - нули; следовательно, их значения в начальном положении, при $t_0=0$, суть $d_0=0$ и $\delta_0=0$. Соответствующее такому начальному положению частное решение /12/ есть $d\equiv 0$, $\delta\equiv 0$.

Развитие /12/ в ряд по δ и ρ даст:

$$/12'/ \qquad \ddot{\underline{d}} + \ddot{\delta} = -\frac{fmM}{\mu r_0^3}\underline{d} - \frac{fmM}{\mu r_0^3}\delta + 3\frac{fmM\rho}{\mu r_0^4}(\underline{d}+\delta) + \ldots$$

/ $\underline{d}$ -невозмущенное /

Невозмущенное решение

$$\ddot{\underline{d}} = -\frac{fmM}{\mu r_0^3}\underline{d}$$

и его аналог

$$\ddot{\delta} = -\frac{fmM}{\mu r_0^3}\delta$$

исключаются из /12'/, т.к. они суть тождества при вышеуказанных начальных положениях.

Остаточний член

$$\frac{3fmM\rho}{\mu r_0^4}(\underline{d}+\delta)$$

при $\underline{d} = 0$

вместе со всеми следующими членами развития - нули. Следовательно $\delta = 0$.

Движение по d может возмущаться только в том случае, если другая, внешная причина, вызовет возмущения начальных значений d_0 и $\dot{d}_0$; поэтому на исследование этой величины автор вернется в следующей работе, при выяснения всех возможностей для резонансов от влияния упругих приливных деформаций.

*

Таким образом, система уравнений /6/ сводится к трем дифференциальным уравнениям первого порядка

$$\text{/13/}\quad \begin{aligned} &1/\quad \dot{r} = \frac{1}{\mu}p_r \\ &2/\quad \dot{p}_r = \frac{1}{\mu r^3}(\underline{K}-Dt)^2 - \frac{fmM}{r^2} \\ &3/\quad \dot{v} = \frac{1}{\mu r^2}(\underline{K}-Dt). \end{aligned}$$

Первые два уравнения /13/ приводят к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\text{/14/}\quad \ddot{r} - \frac{1}{\mu^2 r^3}(\underline{K}-Dt)^2 - \frac{fmM}{r^2} = 0.$$

Уравнение /14/ - точное; при его составлении не сделаны предпосылки малости никаких величин. Оно - нелинейное, но его можно решить любым из методов теории малых возмущений.

ж

У уравнения /14/ существует первый итеграл, которого можно получить из итеграла энергии и интеграла площадей.

В уравнении /1/ полную энергию, постоянную E, можно разделить на две постоянных, $E_{op\delta}$ и $E_{\ell p}$, следующим образом:

$$/15/ \quad E_{op\delta} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\nu}^2) - \frac{fm\mathcal{M}}{r} + Dnt$$

и

$$/16/ \quad E_{\ell p} = \frac{1}{2}A(\dot{\psi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}J(\dot{\psi}_\vartheta^2 + \dot{\varphi}_\vartheta^2 + \dot{\vartheta}_\vartheta^2 + 2\dot{\psi}_\vartheta\dot{\varphi}_\vartheta \cos\vartheta_\vartheta$$

Право на такое разделение уравнения /1/ дает то обстоятельство, что в силе канонических уравнений /6/ оба типа переменных, составляющих /15/ и /16/, не связаны между собой, а кроме этого, переменные в /16/ не связаны с возмущающим фактором $D\nu$, который остается в уравнение /15/. В уравнениях /15/ и /16/ принято также, что депланация d и ее производная - нули, учитывая уравнение /12*/.

Постоянную $E_{op\delta}$ можно найти по формуле

$$/17/ \quad E_{op\delta} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}_0^2 + r_0^2\dot{\nu}_0^2) - \frac{fm\mathcal{M}}{r_0},$$

причем r_0, $\dot{r}_0$ и $\dot{\nu}_0$ суть значения соответствующих величин при $t_0 = 0$; принято, что в этом положении $\nu_0 = 0$.

Постоянная площадей $K_{op\delta}$ остается такой же, как в /8/: $K_{op\delta} = \mu r^2\dot{\nu} + Dt$.

Из /8/ можно выразить $\dot{\nu}$ через r и t:

$$/18/ \quad \dot{\nu}^2 = \frac{(K_{op\delta} - Dt)^2}{\mu^2 r^4}.$$

Уравнения /15/ и /18/ приводят к дифференциальному уравнению первого порядка, связывающему r и t:

$$/19/ \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{M}\left(E_{op\delta} - Dnt\right)r^2 + 2\frac{fmM}{M}r - \frac{(K_{op\delta} - Dt)^2}{M^2}}.$$

/Если обрита спутника эллиптическая, $E_{op\delta} < 0$ /.

Если принять, что апогей - максималвно удаленное положение спутника, перигей - ближайшая точка до центрального тела, и что большая полуось a равна их полусуммы, их можно найти из /19/ следующим образом:

Перигей и апогей характерны тем, что в них существует экстремум функции $r(t)$, соотв. $r(\nu)$. Из /19/ видно, что условие экстремальности, $dr/dt = 0$, приводит к уравнению второй степени по отношению к r, корни которого r_1 и r_2 являются координатами апогея и перигея:

$$/20/ \quad r_{1,2} = \frac{-fmM \pm \sqrt{f^2m^2M^2 + 2\left(E_{op\delta} - Dnt\right)\left(K_{op\delta} - Dt\right)^2 \cdot 1/M}}{2\left(E_{op\delta} - Dnt\right)}$$

Большая полуось орбиты задается уравнением

$$/21/ \quad a = \frac{1}{2}\left(r_1 + r_2\right) = -\frac{fmM}{2\left(E_{op\delta} - Dnt\right)}.$$

Из /21/ видно, что при отрицательном $E_{op\delta}$ /при эллиптической орбите/ большая полуось орбиты убывает с течением времени по гиперболическому отрезку /21/.

Эксцентрицитет орбиты, обозначен e, можно найти по формуле

$$e = \frac{c}{a},$$

причем

$$c = r_1 - a = a - r_2 = \frac{1}{2}\left(r_1 - r_2\right)$$

и

$$a = \frac{1}{2}\left(r_1 + r_2\right).$$

Следовательно

$$/22/ \quad e = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}.$$

В возмущенной задаче, рассматриваемой здесь, имея ввиду /20/, получено выражение, идентично тому выражении, следующего из форм. /11/ на стр. 61 в [14]:

$$/23/ \qquad e = \frac{\sqrt{f^2 m^2 M^2 + \frac{2}{M}(E_{орб} - D n t)(K_{орб} - D t)^2}}{f m M}.$$

/В обозначениях, принятых в [14], $e = \sqrt{1 + \frac{h c^2}{\bar{M}^2}}$; в наших обозначениях $h = \frac{2}{M}(E'_{орб} - D n t)$, $C = \frac{K_{орб} - D t}{M}$, $\bar{M} = f M$, и в выражениях для энергии и постоянной площадей не учитывается движение центрального тела. В таких обозначениях

$$/23'/ \qquad e = \frac{\sqrt{f^2 M^2 m^2 + \frac{2}{m}(E_{орб} - D n t)(K_{орб} - D t)^2}}{f M m}.$$

/В /23'/ место массы m занимает величина M, что следовало ожидат, т.к. при выводах в [14] вместо M входила масса спутника m./

И так, возмущение эксцентрицитета выражено полукубической параболой /23/. Для поведения возмущенного эксцентрицитета существен знак производной по времени выражения под корнем в /23/, обозначено P_e:

$$/24/ \qquad \dot{P}_e = -2 E_{орб} K_{орб} D + 2 E_{орб} D^2 t - D K^2_{орб} n + 4 K D^2_{орб} n t - 3 D^3 n t^2.$$

Вставляя в выражение для энергии эллиптическую скорость $v_e^2 = f(m+M)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ и выражая постоянную площадей через расстояние и угловую скорость перигея, легко получить

$$-2 E_{орб} - K_{орб} n = \frac{f m M}{a}\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right);$$

следовательно производная $\dot{P}$ всегда положительна и произведение $(E_{орб} - D n t)(K_{орб} - D t)^2$ монотонно возрастающая функция времени, знак которой всегда остается отрицательным. Из /23/ ясно, что e возрастает со временем, под влиянием рассматриваемого возмущения.

Если эксцентрицитет невозмущенной орбиты нуль /круговая орбита/, главная часть $\dot{P}_a = -2E_{орб} - 2K_{орб}$ – тоже нуль. В таком случая, для выяснения поведения функции следует обратиться к следующим членам $\dot{P}_e(t)$, содержавшие вторую степень D :

$$\dot{P}_e = 2E_{орб} D^2 t + 4K_{орб} D^2 n t ;$$

Знак этого выражения определяется знаком суммы

$$2E_{орб} - 4K_{орб} \dot{n} = -\frac{fmM}{a} + 4\frac{fmM}{a} = 3\frac{fmM}{a} > 0.$$

Следовательно, при круговой орбите эти возмущения вызывают тоже возрастание эксцентрицитета.

ж

Возмущенную малую полуось орбиты b можно найти по формуле

/25/
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{K_{орб} - Dt}{\sqrt{-2\mu(E_{орб} - Dnt)}} .$$

Параметр возмущенного эллипса, обозначен p, определяется выражением $p = \frac{b^2}{a}$:

/26/
$$p = \frac{(K - Dt)^2}{fmM\mu} .$$

Уравнение возмущенной орбиты получено из /13.3/ и /19/, из которых выключен дифференциал dt:

/27/
$$d\nu = \frac{\sqrt{\varkappa}}{r\sqrt{\varepsilon r^2 + \varphi r - \varkappa}} dr ..$$

Здесь

1/ $\varepsilon = (E_{орб} - Dnt) \cdot {}^2/_\mu$,

/28/ 2/ $\varphi = \frac{2fmM}{\mu}$,

3/ $\varkappa = \frac{1}{\mu^2}(K_{орб} - Dt)^2$.

Интеграл невозмущенной орбиты /27/, в предположении, что ε и $\varkappa$ постоянные, берется в квадратурах:

/29/ $\nu - \nu_0 = \arcsin \dfrac{\varphi\tau - 2\varkappa}{\tau\sqrt{\varphi^2 + 4\varepsilon\varkappa}} + \dfrac{\pi}{2}.$

/Для определения постоянной интегрирования в правой части /29/ на месте τ поставлена координата перигея τ_1, так что ν_0 обозначает истинную аномалию перигея./

В невозмущенном движении, при принятых систем координат, $\nu_0 = 0$.

Для того, чтобы уравнение /29/ могло удовлетворять дифференциальными уравнениями возмущенного движения /13/, "постоянная" ν_0 должна быть функцией t.

Директное решение такой задачи приводит к весьма громоздким выражениям, из которых нельзя сделать качественные выводы; оно поддается только программированию и обработкой на ЭВМ при определенных $E_{орб}$, $K_{орб}$ и $\mathfrak{D}$.

Имея ввиду один из методов, использован при решений малых возмущении в астрономических задач[ах], автор считает, что за некоторый интервал времени, довольно большой для проявления возмущения ν_0, τ остается невозмущенным.

Это означает, что пренебрегается связь между τ и $\mathfrak{D}t$ в правой части /29/. /Производная $\frac{d\tau}{dt}$ и τ_1 однако, при составлении /29/ взяты точно, без такого приближения./ Такое приближение оправдано тем обстоятельством, что рассматриваемое возмущение входит директно только в дифференциальное уравнение, определяющее ν, а в уравнение /13.1/ определяющее τ, входит толко при посредстви p_τ.

Такая постановка дает возможность рассматривать правую часть /29/ как функцию двух независимых переменных: τ и $\mathfrak{D}t$ и продифференцировать ее в соответствии с этим:

$$+ \frac{2\mathfrak{D}}{M} \frac{(2\varkappa - \varphi\tau) n\sqrt{\varkappa} - (2\varepsilon\varkappa + \varphi\varepsilon\tau + \varphi^2)}{(\varphi^2 + 4\varepsilon\varkappa)\sqrt{\varepsilon\tau^2 + \varphi\tau - \varkappa}}\, dt.$$

$$/30/ \quad d\nu - d\nu_0 = \frac{\sqrt{\varkappa}\, d\tau}{\tau\sqrt{\varepsilon\tau^2 + \varphi\tau - \varkappa}} + \cancel{\frac{\tau^2(\varphi^2 + 4\varepsilon\varkappa) + (\varphi\tau - 2\varkappa)(n\sqrt{\varkappa} + \varepsilon)}{\tau\sqrt{\varepsilon\tau^2 + \varphi\tau - \varkappa}\,(\varphi^2 + 4\varepsilon\varkappa)} \frac{2\mathfrak{D}}{M}}\, dt.$$

Первые члены в левой и в правой сторонах /30/ удовлетворяют невозмущенным уравнением /27/.

Для перемещения перигея орбиты получается дифференциальное уравнение $\frac{(\varphi\tau-2\varkappa)n\sqrt{\varkappa}+(2\varepsilon\varkappa+\varphi\varepsilon\tau+\varphi^2)}{(\varphi^2+4\varepsilon\varkappa)\sqrt{\varepsilon\tau^2+\varphi\tau-\varkappa}}dt$.

/31/ $$d\nu_0=-\frac{2D}{M}\cdot\cancel{\frac{\tau^2(\varphi^2+4\varepsilon\varkappa)+(\varphi\tau-2\varkappa)(n\sqrt{\varkappa}+\varepsilon)}{\tau(\varphi^2+4\varepsilon\varkappa)\sqrt{\varepsilon\tau^2+\varphi\tau-\varkappa}}}\,dt.$$

Переменные в правой части /31/ ε и $\varkappa$ меняются медленно со временем; τ же варьирует от τ_1 по τ_2 согласно /20/, причем уменьшается согласно /21/ и /25/.

Интеграл /31/ есть несобственный интеграл от монотонной, почти постоянной функции t, с точками разрыва при значений τ, равных корням τ_1 и τ_2.

Применяя теорему о среднем, можно считать, что ν_0 есть линейная функция Dt. Подробное исследование интеграла /31/ будет проведено для разных значений ε, $\varkappa$ и D в отдельной статье.

ж

Аналогичным образом решено уравнение, определяющее связь между τ и t.

Точное уравнение можно получить из /13.1/ и /13.2/:

/32/ $$\ddot{\tau}=\frac{1}{M^2\tau^3}(K-Dt)^2-\frac{fmM}{M\tau^2}.$$

Нелинейное дифференциальное уравнение /32/ второго порядка решить в квадратурах автору не удалось. Пришлось проинтегрироват уравнение /19/, являющееся первым интегралом /32/, применяя метод варьирования постоянных:

/19'/ $$dt=\frac{\tau\,d\tau}{\sqrt{\varepsilon\tau^2+\varphi\tau-\varkappa}}.$$

Если ε и $\varkappa$ считать невозмущенными постоянными, интеграл /19'/ можно записать в виде:

/33/ $$t=\frac{\sqrt{\varepsilon\tau^2+\varphi\tau-\varkappa}}{\varepsilon}+\frac{\varphi}{2\varepsilon\sqrt{-\varepsilon}}\arcsin\frac{2\varepsilon\tau+\varphi}{\sqrt{\varphi^2+4\varepsilon\tau}}-\frac{\pi\varphi}{4\varepsilon\sqrt{-\varepsilon}}.$$

$$dt - dt_0 = \frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{\varepsilon\tau^2+\varphi\tau-\varkappa}} + \frac{\tau^2 d\varepsilon - d\varkappa}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon\tau^2+\varphi\tau-\varkappa}} - \frac{\sqrt{\varepsilon\tau^2+\varphi\tau-\varkappa}}{\varepsilon^2}\, d\varepsilon -$$

$$/34/ \quad + \frac{3\varphi\, d\varepsilon}{4\varepsilon^2\sqrt{-\varepsilon}} \arcsin\frac{2\varepsilon\tau+\varphi}{\sqrt{\varphi^2+4\varepsilon\varkappa}} + \frac{\varphi}{2\varepsilon^2}\cdot\frac{(2\varepsilon\tau+\varphi)(\varepsilon\, d\varkappa+\varkappa\, d\varepsilon)-\tau(\varphi^2+4\varepsilon\varkappa)\, d\varepsilon}{(\varphi^2+4\varepsilon\varkappa)\sqrt{\varepsilon\tau^2+\varphi\tau-\varkappa}}$$

$$\mp \frac{3\pi\varphi}{8\cdot\varepsilon^2\sqrt{-\varepsilon}}\, d\varepsilon .$$

Первый член слева и первый справа в /34/ удовлетворяют исходным дифференциальным уравнением /19'/; следовательно, дифференциальное уравнение, определяющее возмущение момента прохождения через перигелий, а этим самым и возмущение периода, состоит из оставшихся членов /34/:

$$/35/ \quad d\tau_0 = D\Big\{\frac{\tau^2 n - \frac{2}{\mu}\sqrt{\varkappa}}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon\tau^2+\varphi\tau-\varkappa}} - \frac{n}{\varepsilon^2}\sqrt{\varepsilon\tau^2+\varphi\tau-\varkappa} + \frac{3\pi\varphi n}{8\varepsilon^2\sqrt{-\varepsilon}} -$$

$$- \frac{3n\varphi}{4\varepsilon^2\sqrt{-\varepsilon}} \arcsin\frac{2\varepsilon\tau+\varphi}{\sqrt{\varphi^2+4\varepsilon\varkappa}} + \frac{\varphi}{2\varepsilon^2}\, \frac{\tau n(\varphi^2+4\varepsilon\varkappa)-(2\varepsilon\tau+\varphi)(n\varkappa+\frac{2\sqrt{\varkappa}}{\mu}\varepsilon)}{(\varphi^2+4\varepsilon\varkappa)\sqrt{\varepsilon\tau^2+\varphi\tau-\varkappa}}\Big\}\, dt.$$

Интеграл уравнения /35/ будет представлен, так же, как и интеграл /31/, в следующей работе автора, для разных граничных случаев и для некоторых планет Солнечной системы.

Общая тенденция /35/, так же, как и /31/, ввиду медленно изменяющихся ε и $\varkappa$ и небольших изменений τ для орбит с малым эксцентриситетом, заключается в том, что τ – монотонная, почти линейная функция времени.

*

Точность решений /31/ и /35/ можно улучшить, вводя коррекции в значений τ.

Для этой цели можно воспользоваться точными значениями a, b, τ_1 и τ_2 в форм. /20/, /21/ и /25/, и составить приблизительную модель для поправок невозмущенного эллипса орбиты.

Проще и по мнению автора достаточно точно, скоррегировать значений τ, помножив их на коэффициент поправки:

$$/36/ \quad \tau = \frac{E_{орб}}{E_{орб} - Dnt}.$$

который характеризует возмущение большой полуоси /21/.

Самое точное приближение основывается на использованию возмущения площади орбиты для определения возмущения ρ. Это означает, что ρ равно возмущению средней геометрической величины большой и малой полуоси орбиты:

$$/37/ \qquad v = \sqrt{\frac{K_{орб}}{K_{орб} - \mathcal{D}t} \cdot \left(\frac{E - \mathcal{D}nt}{E}\right)^{3/2}} .$$

ж

В заключении, можно сказать, что неупругие приливные деформации спутника не сказываются на его вращение, а также при отсуствии возмущений соответствующих начальных условий, не меняет и плоскость возмущенной орбиты спутника.

Рассматриваемое возмущение сказывается на большую полуось орбиты, которая уменьшается по гиперболическому закону, на эксцентрицитет орбиты, который возрастает по закону полукубической параболы /в обеих случаях аргумент - возмущение $\mathcal{D}t$, функция времени/.

Неупругие приливные деформации спутника вызывают вековое смещение перигелия его орбиты и вековое изменение периода с орбитального движения спутника. Последние две зависимости выражены более сложными алгебраическими зависимостями. Для некоторых тел Солнечной системы и для граничных случаев задачи количественные исследования будут обработаны на ЭВМ и представлены в одной из следующих работ автора.

Литература

1. Финкельштейн А.М. Небесно-механические релятивисткие эксперименты в солнечной системе. Ин-т теорет.-физ. АН УССР. Препринт ИТФ-75-16 Р, Киев, 1975.
2. Долгачев В.И., Доможилова Л.М., Рыбаков А.И. О невязках в движении перигелиев орбит внутренних планет, АЖ 1975, 5.
3. Печерникова Г.В., Витязов А.В. Эволюция эксцентрицитетов орбит планет в процессе их формирования. А.Ж. 1980,т.57,в.4.
4. Долгачев В.И., Калинина Е.П. О вековом изменении угловой скорости вращения Земли. А.Ж. 1980, т.57, в.4.
5. Рыбаков А.И., Калинина Е.П. О вековом изменении $\bar{\omega}$ Земли. А.Ж. 1980, т.57, в. 4.
6. Jefferys William H., Szebehely Victor G. Dynamics and stability of the solar system. "Comments Astrophys." 1978, 8, No 1, pp. 9-17.
7. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Проблемы динамической эволюции планетных систем. Успехи физ. наук, 1978, 125, № 2.
8. Singer S., Fred. The early history of the Earth - Moon system. Earth-Sci.Revs., 1977, 13, No 2, pp 171-189.
9. Rubincam D.P., Tidal friction and the early history of the Moon's orbit. J. Geophys. Revs. 1975, 80, No 11, 1537.
10. Burse M. The Earth-Moon tidar force function. Moon and Planets. 1983, 28, No 1, pp. 49-53.
11. Nobile A.M. Secular effects of tidal friction on the planet satellite systems of the solar system. Moon and Planets, 1978, 18, No 2, pp. 203-216.
12. Kopal Z., Song.Guo-Xuan. Vibrational stability of the components of close binary systems. Astrophys. and Space Sci., 1983, 92, No 1, pp. 3-30.

13. Д.Коларов, А.Балтов, Н.Бончева. Механика на пластичните среди. София 1975, изд. БАН, с.с. 74,76,98,118,119,149,215.

14. Wylie E.B., Strecter V.L., Papadakis C.N., Richart F.E. Tansient two-dimm. Analysis of soels by latticework method lopez dam. case study. Univ. of Michigan, Dep. of Civil Engineering, oct. 1974.

15. Вильке В.Г., Копылов С.А., Марков Ю.Г. Об эволюции вращений вязкоупругой орбите в центральном поле сил. А.Ж., 1984, т. 61, вып. 6.

16. Лурье А.И. Аналитическая механика. Москва,1961.

17. Н.Бонев. Теоретична астрономия. София,1961.

Обозначения

M – масса центрального тела

O – центр инерции центрального тела

J – осевой момент инерции центрального тела

m – масса спутника

P – центр инерции спутника

A, B, B – главные моменты инерции спутника

σ_p – граница напряжения пропорциональности в спутнике

C – центр инерции всей системы

f – постоянная притяжения

$CXYZ$ – инерциальная система координат

$Pxyz$ – связанная со спутником система координат

$\left.\begin{matrix} r, \dot{r}, p_r; \\ \nu, \dot{\nu}, p_\nu; \\ \alpha, \dot{\alpha}, p_\alpha: \end{matrix}\right\}$ обобщенные координаты, скорости и импульсы орбитального движения спутника

$\left.\begin{matrix} \varphi, \dot{\varphi}, p_\varphi; \\ \vartheta, \dot{\vartheta}, p_\vartheta; \\ \psi, \dot{\psi}, p_\psi: \end{matrix}\right\}$ обобщенные координаты /углы Эйлера/, скорости и импульсы углового движения

$\begin{matrix} \varphi_\odot, \dot{\varphi}_\odot, p_{\varphi_\odot}; \\ \vartheta_\odot, \dot{\vartheta}_\odot, p_{\vartheta_\odot}; \\ \psi_\odot, \dot{\psi}_\odot, p_{\psi_\odot}: \end{matrix}$ обобщенные координаты /углы Эйлера/, скорости и импульсы углового движения центрального тела

E – общая энергия системы

E_k – общая кинетическая энергия системы

H – гамильтониан системы

$\cancel{\underline{E}}$, $\underline{k}$ – постоянная интегрирования и постоянная площадей невозмущенного движения

$\underline{E}, \underline{K}$ – Невозмущенные значения E и K

n – среднее движение спутника /невозмущенное/

ρ, τ – возмущение величины r

δ – возмущение величины α

$\underline{r}, \underline{\alpha}, \underline{\nu}$ - обобщенные координати r, α и ν при невозмущенном движении

$E_{орб}$ - постоянная энергии для орбитального движения

$K_{орб}$ - постоянная площадей от орбитального движения

$E_{вр}$ - постоянная энергии для вращательного движения

r_1 - расстояние от центрального тела до апогея обеих тел

r_2 - расстояние от центрального тела до перигея возмущенной орбиты

a - большая полуось возмущенной орбиты

e - эксцентрицитет возмущенной орбиты

b - малая полуось орбиты

P_e - дискриминант выражения для e.

c - половина расстояния между фокусами возмущенной орбиты

p - параметр возмущенной орбиты

ν_0 - угловое расстояние между возмущенным и невозмущенным положением перигелия

t_0 - время прохождения спутника через перигей

$\varepsilon, \varphi, \varkappa$ - обобщенные параметры задачи

D - коэффициент диссипации